IV этап Республиканской олимпиады школьников по математике – 2018
2 день. Ответы для участников и рекомендации для жюри.

4-маселесини чыгарылышы

Эквиваленттүүлүктү карап чыгалы

$$\frac{a^2}{b} \geq 2a - b \Leftrightarrow a^2 \geq 2ab - b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0,$$

$$\frac{b^3}{c^2} \geq 3b - 2c \Leftrightarrow b^3 \geq 3bc^2 - 2c^3 \Leftrightarrow (b-c)^2(b+2c) \geq 0,$$

$$\frac{c^4}{a^3} \geq 4c - 3a \Leftrightarrow c^4 \geq 4a^3c - 3a^4 \Leftrightarrow (c-a)^2(c^2+2ca+3a^2) \geq 0.$$

Кошуп, төмөнкүнү алабыз

$\frac{a^2}{b} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^4}{a^3} \geq -a + 2b + 2c$. Маселе далилденди.

Решение задачи 4

Рассмотрим эквивалентности

$$\frac{a^2}{b} \geq 2a - b \Leftrightarrow a^2 \geq 2ab - b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0,$$

$$\frac{b^3}{c^2} \geq 3b - 2c \Leftrightarrow b^3 \geq 3bc^2 - 2c^3 \Leftrightarrow (b-c)^2(b+2c) \geq 0,$$

$$\frac{c^4}{a^3} \geq 4c - 3a \Leftrightarrow c^4 \geq 4a^3c - 3a^4 \Leftrightarrow (c-a)^2(c^2+2ca+3a^2) \geq 0.$$

Сложив, получим

$\frac{a^2}{b} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^4}{a^3} \geq -a + 2b + 2c$ то, что требовалось доказать.

5-маселенин чыгарылышы

Эгерде x, y, z сандары ар түрдүү жана $x < y < z$ болсо,

үч бурчтуктун эрежеси боюнча $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$

$x^n + y^n > z^n$ же $\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1 > \left(\frac{z}{y}\right)^n$.

$\frac{x}{y} < 1$ болгондуктан $\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1 < 2 \quad \forall\, n \in \boldsymbol{N}$.

Башка жактан, $\frac{z}{y} > 1$ болгондуктан,

анда $\left(\frac{z}{y}\right)^N > 2$ болгон натуралдык N табылат.

Карама каршылык болуп калды.

Демек, x, y, z сандарынын арасында тең сандар бар жана негизи капталынан узун эмес **тең капталдуу үч бурчтуктар** маселенин шартын канааттандырат.

Решение задачи 5

Пусть числа x, y, z различны и $x < y < z$.

По правилу треугольника $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$

$x^n + y^n > z^n$ или $\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1 > \left(\frac{z}{y}\right)^n$.

Т.к. $\frac{x}{y} < 1,$ то $\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1 < 2\ \forall\, n \in \boldsymbol{N}$.

С другой стороны, т.к. $\frac{z}{y} > 1,$ то найдется натуральное N такое, что $\left(\frac{z}{y}\right)^N > 2$.

Получили противоречие.

Следовательно, среди x, y, z есть равные числа и **равнобедренные треугольники** с основанием не длиннее боковой стороны удовлетворяют условию задачи.

6 –маселенин чыгарылышы

Эгерде α – берилген сан болсо, биринчи 5 мүчөсүн кошуп,

$\alpha > \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} = 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} = 6\frac{4}{14} > 6$ алабыз.

Анда калган кошулуучулар

$$\frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!} + \frac{2^8}{8!} + \cdots + \frac{2^{2017}}{2017!} + \frac{2^{2018}}{2018!} = \frac{4}{45} + \frac{4}{45}\cdot\frac{2}{7} +$$

$$+ \frac{4}{45}\cdot\frac{2^2}{7\cdot 8} + \cdots + \frac{4}{45}\cdot\frac{2^{2012}}{7\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2017\cdot 2018} <$$

$$< \frac{4}{45} + \frac{4}{45}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{45}\cdot\frac{1}{4} + \cdots \frac{4}{45}\cdot\frac{1}{2^{2012}} =$$

$$= \frac{4}{45}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{2012}}\right) < \frac{4}{45}\cdot 2 < \frac{1}{5}$$

Демек, $6 < \alpha < 6\frac{4}{15} + \frac{1}{5} < 7$, мында бүтүн бөлүк $[\alpha] = 6$.

Жооп: **6**

Решение задачи 6

Пусть α – заданное число. Сложив первые 5 членов, имеем

$$\alpha > \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} = 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} = 6\frac{4}{14} > 6.$$

Тогда остальные слагаемые

$$\frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!} + \frac{2^8}{8!} + \cdots + \frac{2^{2017}}{2017!} + \frac{2^{2018}}{2018!}$$

$$= \frac{4}{45} + \frac{4}{45}\cdot\frac{2}{7} + \frac{4}{45}\cdot\frac{2^2}{7\cdot 8} + \cdots + \frac{4}{45}\cdot\frac{2^{2012}}{7\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2017\cdot 2018} <$$

$$< \frac{4}{45} + \frac{4}{45}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{45}\cdot\frac{1}{4} + \cdots \frac{4}{45}\cdot\frac{1}{2^{2012}} =$$

$$= \frac{4}{45}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{2012}}\right) < \frac{4}{45}\cdot 2 < \frac{1}{5}$$

Следовательно, $6 < \alpha < 6\frac{4}{15} + \frac{1}{5} < 7$, откуда целая часть $[\alpha] = 6$.

Ответ: **6**