IV этап Республиканской олимпиады школьников по математике – 2018
1 день. Ответы для участников и рекомендации для жюри.

1-маселенин чыгарылышы

Эгерде х – Кызыл-Дыйкандан (К-Д) келген балбандардын саны болсо,
анда (х+9) – бул Орто-Суудан (О-С) келген спортчулардын саны.

К-Д келген катышуучулар өз ара $\frac{x(x-1)}{2}$ күрөш өткөрүшүп, баары биригип $\frac{x(x-1)}{2}+K$ упай алышты, бул жерде K – бул Кызыл-Дыйкандан келген балбандардын Орто-Суудан келген балбандарды уткан сан.
Орто-Суудан келген балбандар болгону $\frac{(x+8)(x+9)}{2}+x(x+9)-K$ упай алган.
Анда $9\left(\frac{(x-1)x}{2}+K\right)=\frac{(x+8)(x+9)}{2}+x(x+9)-K$ теңдемесин түзөбүз, аны чыгарып, К параметри бар $3x^2-22x+10K-36=0$ – квадраттык теңдемесин алабыз. x натуралдуу болгондуктан, дискриминант $4(229-30K)$ – толук квадрат.
Демек, $K\leq 7$ жана K=2 же K=6.

Эгерде $K=2$ болсо, анда $x=8$ – бул Кызыл-Дыйкандан келген балбандардын саны, алар $\frac{8\cdot 7}{2}+2=30$ упай алышкан, ал эми $K=6$ болсо, анда $x=6$ жана алар $\frac{6\cdot 5}{2}+6=21$ упай алышкан.

Жооп: **30 упай**

Решение задачи 1

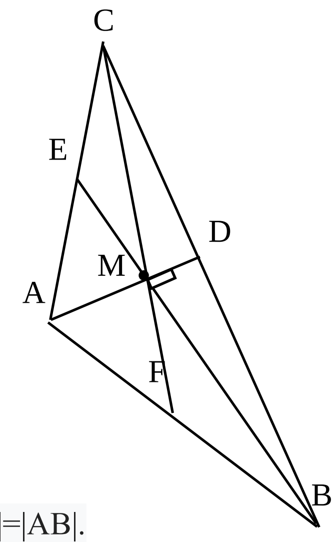
Пусть х – число борцов из Кызыл-Дыйкана (К-Д).
Тогда (х+9) – это число спортсменов из Орто-Суу (О-С).
Участники из К-Д провели $\frac{x(x-1)}{2}$ поединков между собой и вместе они набрали $\frac{x(x-1)}{2}+K$ очков, где K – число побед борцов из К-Д над борцами из О-С.

А борцы из О-С набрали всего $\frac{(x+8)(x+9)}{2}+x(x+9)-K$ очков.
Тогда составим уравнение
$9\left(\frac{(x-1)x}{2}+K\right)=\frac{(x+8)(x+9)}{2}+x(x+9)-K$, решая,
получим $3x^2-22x+10K-36=0$ – квадратное уравнение с параметром К.
Т.к. x натурально, дискриминант $4(229-30K)$ – полный квадрат.
Следовательно, $K\leq 7$ и имеем K=2 или K=6.

при $K=2$ $x=8$ – это число борцов из К-Д и они набрали $\frac{8\cdot 7}{2}+2=30$ очков,
а при $K=6$ $x=6$ и они взяли $\frac{6\cdot 5}{2}+6=21$ очко.

Ответ: **30 очков**

2-маселенин чыгарылышы



Эгерде медианалар M чекитинде кесилишсе, ал эми

F –AB жагынын ортосу болсо (сүрөттү караңыз),

анда F – ΔABM үч бурчтугунун сыртынан сызылган

айлана, анткени ΔABM – тик бурчтуу үч бурчтук.

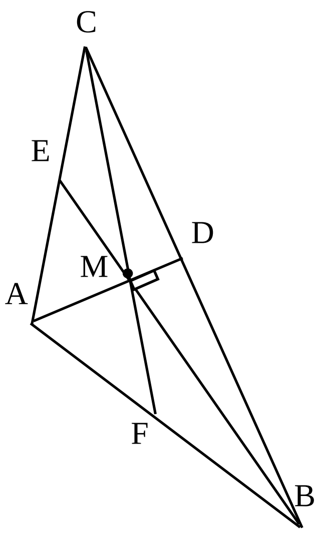
Демек, |AB|=2|FM|; ал эми CF медианасы

M чекитинде 2:1 катышында бөлүнсө, анда |AB|=|CM|.

∠AMC бурчунда ∠AMC –кең бурч, демек, |AC| > |CM|=|AB|.

Ошондой эле, |BC| > |AB|. Демек, AB – ABC үч бурчтугунун эң кыска жагы.

Решение задачи 2



Пусть медианы пересекаются в точке M,

а F – середина стороны AB (см.рис.).

Тогда F – центр описанной

окружности вокруг ΔABM,

т.к. ΔABM – прямоугольный.

Итак, |AB|=2|FM|; а т.к. медиана CF в т. M делится

в отношении 2:1, то |AB|=|CM|.

В ∠AMC угол ∠AMC тупой, следовательно, |AC| > |CM|=|AB|.

Аналогично, |BC| > |AB|. Итак, AB – самая короткая сторона треугольника ABC.

3-маселенин чыгарылышы

$x \leq y$ болсун. Төмөнкү үч жагдайды карап чыгалы:

1) Эгерде $2x < y + 1$ болсо, анда $(2^y)^2 < 1 + 4^x + 4^y < (1 + 2^y)^2$, мындан $1 + 4^x + 4^y$ толук квадрат эмес экени келип чыгат.

---

2) Эгерде $2x = y + 1$ болсо, анда

$1 + 4^x + 4^y = 1 + 2^{y+1} + 4^y = (1 + 2^y)^2$.

Демек, бардык үчтүктөр $(x, y, z) = (x, 2x - 1, 1 + 2^{2x-1})$ берилген $\forall x \in N$ теңдемесин канааттандырат.

3) Эгерде $2x > y + 1$болсо, анда теңдемеден

$4^x + 4^y = 4^x(1 + 4^{y-x}) = (z - 1)(z + 1)$ алабыз

---

z –1 жана z +1 эң чоң жалпы бөлүүчү 2ге барабар, z – так сан болгондуктан,

z – 1 же z + 1 сандарынын бири $2^{2x-1} = \frac{1}{2}4^x$ болуп бөлүнөт.

Бирок бул мүмкүн эмес, анткени

$2(1 + 4^{y-x}) \leq 2(1 + 4^{x-2}) < 2^{2x-1} - 2 \quad \forall\, x \in \boldsymbol{N}$

Демек теңдеменин чыгарылышы төмөнкү үчтүктөр болот:

$(x, y, z) = (x,\ \ 2x - 1,\ \ 1 + 2^{2x-1})$ же $(2x - 1,\ x,\ \ 1 + 2^{2x-1})\ \ \forall x \in \boldsymbol{N}$.

Решение задачи 3

Пусть $x \leq y$.

Рассмотрим три случая:

1) Если $2x < y + 1$, то $(2^y)^2 < 1 + 4^x + 4^y < (1 + 2^y)^2$, откуда следует, что $1 + 4^x + 4^y$ не является полным квадратом.

---

2) Если $2x = y + 1$, то

$1 + 4^x + 4^y = 1 + 2^{y+1} + 4^y = (1 + 2^y)^2$.

Следовательно, все тройки $(x, y, z) = (x, 2x - 1,\ \ 1 + 2^{2x-1})$ удовлетворяют заданному уравнению $\forall x \in N$.

3) Если $2x > y + 1$, то из уравнения имеем $4^x + 4^y = 4^x(1 + 4^{y-x}) = (z - 1)(z + 1)$.

Т.к. НОД (z – 1, z + 1)=2, z – нечётно, то одно из чисел z – 1 или z + 1

делится на $2^{2x-1} = \frac{1}{2}4^x$.

Но это невозможно, т.к.

$2(1 + 4^{y-x}) \leq 2(1 + 4^{x-2}) < 2^{2x-1} - 2 \quad \forall\, x \in \boldsymbol{N}$

Итак, решением уравнения являются тройки $(x, y, z) = (x,\ \ 2x - 1,\ \ 1 + 2^{2x-1})$

или $(2x - 1,\qquad x,\qquad 1 + 2^{2x-1})\ \ \forall x \in \boldsymbol{N}$.