Решения задач районного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике для вывешивания на стенде.

II тур

Задача 1

$n-$ наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 2020.

а) Найдите число n

б) Найдите сумму цифр числа $2n$

Решение

Если два натуральных числа имеют разное количество цифр в записи, то меньшее будет то число, в записи которого меньше цифр.

Если сумма этих цифр задана 2020, то меньше цифр будет в том числе, в записи которого содержится наибольшее количество девяток.

$2020:9=224(\text{ост.}4)$

Значит, в записи искомого числа будет 224 цифры 9 и 1 цифра 4.

Если два натуральных числа имеют одинаковое количество цифр в записи, то меньшим будет то число, у которого цифра в старшем разряде меньше.

Значит, $n=4\underbrace{99.....99}_{224}$.

$2n=2\cdot 4\underbrace{99.....99}_{224}=\underbrace{99.....99}_{224}8.$

Сумма цифр в числе $2n$

$9\cdot 224+8=2024.$

Ответ: а) $n=4\underbrace{99.....99}_{224}$.

б) 2024

Задача 2

Первый автобус из города в посёлок отправляется между 09:00 и 10:00, второй – между 10:00 и 11:00. Промежутки времени между отправлением любых двух последовательных автобусов одинаковы и составляют целое число минут. Если последний, двадцатый автобус отправляется в 19:05, то когда отправляется предпоследний автобус?

Решение

Между первым и последним автобусом было 19 промежутков одинаковой продолжительности.

Между вторым и последним автобусом было 18 промежутков одинаковой продолжительности.

19:05 – 09:00 = 10 ч 5 мин = 605 мин, 19:05 – 10:00 = 9 ч 5 мин = 545 мин,

19:05 – 11:00 = 8 ч 5 мин = 485 мин.

Пусть между отправлением двух последовательных автобусов проходит x мин, где $x-$ натуральное число.

Поскольку 1-й автобус отправляется между 09:00 и 10:00, то промежуток времени между первым и последним автобусом больше 545 минут, но меньше 605 минут. Получим первое двойное неравенство:

$545 < 19x < 605.$

Поскольку 2-й автобус отправляется между 10:00 и 11:00, то промежуток времени между вторым и последним автобусом больше 485 минут, но меньше 545 минут. Получим второе двойное неравенство:

$485 < 18x < 545.$

Составим систему неравенств и решим её.

$$\begin{cases} 545 < 19x < 605, \\ 485 < 18x < 545 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28\frac{13}{19} < x < 31\frac{16}{19}, \\ 26\frac{17}{18} < x < 30\frac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow 28\frac{13}{19} < x < 30\frac{5}{18},$$

$x-$ натуральное число. Значит, $x = 29$ или $x = 30$.

Условию задачи удовлетворяют 2 расписания автобусов с промежутками между рейсами 29 минут и 30 минут соответственно.

1) Промежуток между рейсами равен 29 мин.

Время отправления предпоследнего автобуса – 18:36

2) Промежуток между рейсами равен 30 мин.

Время отправления предпоследнего автобуса – 18:35

Ответ: Время отправления предпоследнего автобуса 18:36 или 18:35.

или

Пусть x – время отправления предпоследнего автобуса в минутах, $x-$натуральное число, $x < 1145$.

Промежуток времени между предпоследним и последним автобусами равен $(1145 - x)$ минут.

Между первым и последним автобусом было 19 промежутков одинаковой продолжительности. Значит время отправления 1 автобуса $1145 - 19 \cdot (1145 - x) = 19x - 20610$ (мин.)

Между вторым и последним автобусом было 18 промежутков одинаковой продолжительности. Значит время отправления 2 автобуса
$1145-18\cdot(1145-x)=18x-19465$ (мин.)

Поскольку 1-й автобус отправляется между 09:00 и 10:00, то выполняется первое двойное неравенство

$540<19x-20610<600.$

Поскольку 2-й автобус отправляется между 10:00 и 11:00, то выполняется второе двойное неравенство

$600<18x-19465<660.$

Составим систему неравенств и решим её.

$$\begin{cases}540<19x-20610<600,\\600<18x-19465<660\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}21150<19x<21210,\\20065<18x<20125\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1113\frac{3}{19}<x<1116\frac{6}{19},\\1114\frac{13}{18}<x<1118\frac{1}{18}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1114\frac{13}{18}<x<1116\frac{6}{19}.$$

Т.к. промежутки времени между отправлением любых двух последовательных автобусов одинаковы и составляют целое число минут, то $x=1115,\ x=1116.$

$$\frac{1115}{60}=18\frac{35}{60},\ \frac{1116}{60}=18\frac{36}{60}.$$

Время отправления предпоследнего автобуса – 18:35 или 18:36.

или

Пусть x – время отправления предпоследнего автобуса в часах, $x<19\frac{1}{12}.$
Промежуток времени между предпоследним и последним автобусами равен
$\left(19\frac{1}{12}-x\right)$ часов.

Между первым и последним автобусом было 19 промежутков одинаковой продолжительности. Значит время отправления 1 автобуса
$19\frac{1}{12}-19\cdot\left(19\frac{1}{12}-x\right)=19x-343\frac{1}{2}$(часа).

Между вторым и последним автобусом было 18 промежутков одинаковой продолжительности. Значит время отправления 2 автобуса
$19\frac{1}{12}-18\cdot\left(19\frac{1}{12}-x\right)=18x-324\frac{5}{22}$(часа).
Поскольку 1-й автобус отправляется между 09:00 и 10:00, то выполняется первое двойное неравенство

$$9 < 19x - 343\frac{1}{2} < 10.$$

Поскольку 2-й автобус отправляется между 10:00 и 11:00, то выполняется второе двойное неравенство:

$$10 < 18x - 324\frac{5}{12} < 11.$$

Составим систему неравенств и решим её.

$$\begin{cases} 9 < 19x - 343\frac{1}{2} < 10, \\ 10 < 18x - 324\frac{5}{12} < 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 343\frac{1}{2} < 19x < 10 + 343\frac{1}{2}, \\ 10 + 324\frac{5}{12} < 18x < 11 + 324\frac{5}{12} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 352\frac{1}{2} < 19x < 353\frac{1}{2}, \\ 334\frac{5}{12} < 18x < 335\frac{5}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18\frac{21}{38} < x < 18\frac{23}{38}, \\ 18\frac{125}{216} < x < 18\frac{137}{216} \end{cases} \Leftrightarrow 18\frac{125}{216} < x < 18\frac{23}{38}.$$

Т.к. промежутки времени между отправлением любых двух последовательных автобусов одинаковы и составляют целое число минут, то выбираем из полученного промежутка дроби со знаменателем 60:

$$18\frac{35}{60} \text{ и } 18\frac{36}{60}.$$

Время отправления предпоследнего автобуса – 18:35 или 18:36.

Задача 3

В треугольнике ABC $AB = 5$; $AC = 12$. Точка N лежит на стороне AB, точка P – на стороне BC, точки M и Q на стороне AC так, что четырёхугольник $MNPQ$ – квадрат. Найдите площадь квадрата $MNPQ$, если площадь треугольника ABC равна 24.

Дано: $\triangle ABC$

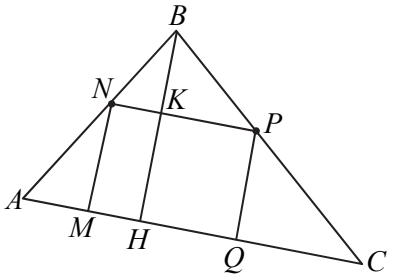
$N \in AB$; $P \in BC$

$M \in AC$; $Q \in AC$

$AB = 5$, $AC = 12$

$S_{\triangle ABC} = 24$

Найти S_{MNPQ}



Решение

Проведём $BH \perp AC$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot BH = 6 \cdot BH$

$6 \cdot BH = 24 \Leftrightarrow BH = 4$

$\triangle BNP \sim \triangle BAC$ как треугольники с общим углом и параллельными сторонами, лежащими против этого угла.

$\frac{NP}{AC} = \frac{BK}{BH}$

Пусть $MN = NP = PQ = QM = x$, тогда $BK = 4 - x$, $0 < x < 4$

$\frac{x}{12} = \frac{4-x}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 4 - x \Leftrightarrow x = 12 - 3x \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$

$S_{MNPQ} = x^2$

$S_{MNPQ} = 3^2 = 9$ (кв.ед)

или

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $MN = NP = PQ = QM = x$, $x > 0$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$

$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot \sin\alpha = 24 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \sin\alpha = 2 \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{4}{5}$

В прямоугольном $\triangle ANM$ $\sin\alpha = \frac{NM}{AN} = \frac{x}{AN}$

$\frac{x}{AN} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow AN = \frac{5x}{4} = 1,25x$

$\triangle ABC \sim \triangle NBP$

$\frac{AC}{NP} = \frac{AB}{NB}$ $NB = AB - AN = 5 - 1,25x$

$\frac{12}{x} = \frac{5}{5 - 1,25x} \Leftrightarrow 12 \cdot (5 - 1,25x) = 5x \Leftrightarrow 60 - 15x = 5x \Leftrightarrow 20x = 60 \Leftrightarrow x = 3$

$S_{MNPQ} = 3^2 = 9$

или

Проведём $BH \perp AC$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$

$\frac{1}{2}\cdot 12\cdot BH = 24$

$BH = 4$

$\triangle ABH$ – прямоугольный, $AB = 5;\ BH = 4;\ AH = 3$

$tg\angle BAH = \frac{BH}{AH} = \frac{4}{3}$

Пусть $MN = NP = PQ = QM = x,\ \ x < 0 < 4$

$\triangle ANM$ – прямоугольный

$AM = \frac{NM}{tg\angle BAH} = \frac{x}{\frac{4}{3}} = \frac{3x}{4}$

В прямоугольном $\triangle BHC$ $\ BH = 4;\ HC = 12 - 3 = 9$

$tg\angle ACB = \frac{BH}{HC} = \frac{4}{9}$

В прямоугольном $\triangle PQC$ $\ PQ = QC\cdot tg\angle PCQ \Leftrightarrow QC = \frac{PQ}{tg\angle PQC}$

$QC = \frac{x}{tg\angle ABC} = \frac{x}{\frac{4}{9}} = \frac{9x}{4}$

Т.к.

$AC = AM + MQ + QC,$ составим уравнение

$12 = \frac{3x}{4} + x + \frac{9x}{4} \Leftrightarrow \frac{3x + 4x + 9x}{4} = 12 \Leftrightarrow \frac{16x}{4} = 12 \Leftrightarrow x = 3$

$S_{MNPQ} = 3^2 = 9$

Ответ: 9