Критерии оценивания районного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике для вывешивания на стенде.

I тур

За записанный короткий правильный ответ участнику ставится 1 балл

№	Правильный ответ	Количество баллов
1.	1	1
2.	-12	1
3.	12	1
4.	18	1
5.	1023467895	1
6.	29	1
7.	380	1
8	$\frac{1}{6}$	1
9	$x^2-4x+1=0$ **или** $ax-4ax+a=0,$ где $a\neq 0$ **или** любое квадратное уравнение, коэффициенты которого пропорциональны числам $1;-4;1$	1
10	8 **или** 8 кв. ед.	1
11	-1	1
12	2	1
13	На 32% **или** 32	1
14	6	1
15	72° **или** 72	1
16	2	1
17	360	1
18	3	1
19	48	1
20	30 см **или** 30	1
21	$\frac{2}{3}$	1
Всего		21 балл

Решения задач по математике

Задача 1

Какой цифрой оканчивается число 2019^{2020}?

Решение

$2019^{2020} = \left(2019^2\right)^{1010}$ число 2019^2 оканчивается цифрой 1. Значит и любая его степень оканчивается цифрой 1.

Ответ: 1

Задача 2

Если $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8^4$, то $x =$

Решение

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8^4 \Leftrightarrow \left(2^{-1}\right)^x = \left(2^3\right)^4 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^{12} \Leftrightarrow -x = 12 \Leftrightarrow x = -12$

Ответ: -12

Задача 3

Среднее арифметическое пятнадцати чисел равно 10, среднее арифметическое других десяти чисел равно 15.

Найдите среднее арифметическое всех двадцати пяти чисел.

Решение

Среднее арифметическое пятнадцати чисел равно 10, значит их сумма равна $10 \cdot 15 = 150$.

Среднее арифметическое других десяти чисел равно 15, значит их сумма равна $15 \cdot 10 = 150$.

Сумма всех двадцати пяти чисел равна $150 + 150 = 300$, а их среднее арифметическое равно $\frac{300}{25} = 12$.

Ответ: 12

Задача 4

Если $x + y = 3$, $x^2 + y^2 = 7$, то $x^3 + y^3 =$

Решение

$x + y = 3$, $x^2 + y^2 = 7$

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

$7 = 3^2 - 2xy$

$2xy = 9 - 7$

$2xy = 2$

$xy = 1$

$x^3 + y^3 = (x + y) \cdot \left(x^2 - xy + y^2\right) = 3 \cdot (7 - 1) = 18$

или

$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x + y)^3 - 3xy \cdot (x + y) = 3^3 - 3 \cdot 1 \cdot 3 = 27 - 9 = 18$

или решив систему $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=7 \end{cases}$, подставить значения x и y в выражение x^3+y^3 и посчитать

Ответ: 18

Задача 5

Наименьшее натуральное число, кратное 15, в записи которого встречаются все десять цифр равно

Решение

Число кратно 15, если оно кратно 3 и 5 (т. к. 3 и 5 – взаимно простые числа).

$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45,$ значит число кратно 3, если каждая из десяти цифр встречается один раз.

Чтобы это число было кратно 5, последней цифрой в его записи должна быть либо 0, либо 5.

Наименьшим таким числом будет 1023467895

Ответ: 1023467895

Задача 6

x и y – натуральные числа.

Если $8x+7y=31,$ то $7x+8y=$

Решение

$8x+7y=31$

$8x=31-7y$

$8x-$ чётное число, тогда $(31-7y)-$ чётное число, значит $y-$ нечётное число

$31-7y\ge 8,$ так как $x-$ натуральное число по условию, значит $-7y\ge -23,$ $y\le \frac{23}{7}.$

$y-$ натуральное число по условию, значит $y=1$ или $y=3.$

1) Если $y=1, x=3$

2) Если $y=3, x=\frac{5}{4}-$ не является натуральным числом

Значит, $x=3, y=1$

$7x+8y=7\cdot 3+8\cdot 1=29$

или

$31=8x+7y$

Подбором $31=7+7+7+7+3=7+(7+1)+(7+1)+(7+1)=7+8+8+8=7+8\cdot 3,$

значит, $x=3,$ $y=1$

Т.о. $7x+8y=7\cdot 3+8\cdot 1=21+8=29$

Ответ: 29

Задача 7

Пятый член геометрической прогрессии равен 20, а её восьмой член равен 19. Найдите произведение третьего и десятого членов этой прогрессии.

Решение

По свойству конечной геометрической прогрессии: произведение членов геометрической прогрессии, равноудаленных от начала и конца конечной прогрессии, постоянно, т.е.

$b_3 \cdot b_{10} = b_5 \cdot b_8 = 20 \cdot 19 = 380,$

где $b_n - n$-ый член геометрической прогрессии

или

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$

где $q -$ знаменатель геометрической прогрессии

$b_3 = b_1 \cdot q^2,$

$b_{10} = b_1 \cdot q^9,$

$b_3 \cdot b_{10} = b_1 q^2 \cdot b_1 q^9 = b_1^2 q^{11}.$

$b_5 = b_1 \cdot q^4,$

$b_8 = b_1 \cdot q^7,$

$b_5 \cdot b_8 = b_1 q^4 \cdot b_1 q^7 = b_1^2 q^{11}.$

$b_3 \cdot b_{10} = b_5 \cdot b_8 = 20 \cdot 19 = 380$

или

можно решить систему $\begin{cases} b_1 q^4 = 20 \\ b_1 q^7 = 19, \end{cases}$

найти b_1 и $q,$ затем найти произведение $b_3 \cdot b_{10}$

Ответ: 380

Задача 8

В первый день на отделке дома работало 10 рабочих, во второй день – половина этой бригады, а оставшуюся часть работы выполнили за третий день 3 рабочих.

Если каждый рабочий выполнял одинаковый объём работы ежедневно, то какая часть всей работы выполнена в третий день?

Решение

Объём работы прямо пропорционален количеству занятых рабочих. Значит, объём работы делится в отношении 10:5:3. Т.о. $\dfrac{3}{10+5+3} = \dfrac{3}{18} = \dfrac{1}{6}$

или

Если принять весь объём за 1, то производительность одного рабочего $\frac{1}{18}$ часть работы в день, т.к. всю эту работу условно выполнили $10+\frac{1}{2}\cdot 10+3=18$ (рабочих). И тогда 3 рабочих выполнили $3\cdot\frac{1}{18}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$ часть работы за третий день.

Ответ: $\frac{1}{6}$

Задача 9

Запишите квадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен $2+\sqrt{3}$.

Решение

Коэффициенты квадратного уравнения будут целыми числами, если второй корень уравнения равен $2-\sqrt{3}$.

$\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=1$

$\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=4$

По теореме, обратной теореме Виета, условию удовлетворяет уравнение $x^2-4x+1=0.$

или квадратное уравнение коэффициенты которого пропорциональны числам $1;-4;1$

или $ax^2-4ax+a=0,$ где a – любое, отличное от нуля число

Ответ: $x^2-4x+1=0.$ или квадратное уравнение, коэффициенты которого пропорциональны числам 1; –4; 1.

Задача 10

На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки K и N соответственно. $AK:KB=BN:NC=1:2.$

Если площадь треугольника ABC равна 36, то площадь треугольника KBN равна

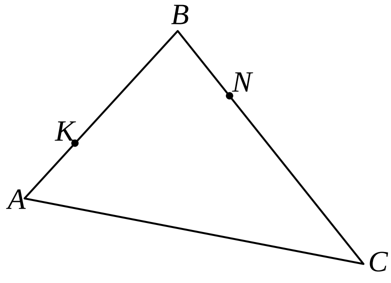
Дано: $\triangle ABC$

$K\in AB;\ N\in BC$

$AK:KB=BN:NC=1:2$

$S_{\triangle ABC}=36$

Найти $S_{\triangle KBN}$



Решение

$AK:KB=1:2,$ значит $KB=\frac{2}{3}AB.$

Аналогично $BN=\frac{1}{3}BC.$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC$$

$$S_{\triangle KBN}=\frac{1}{2}KB\cdot BN\cdot\sin\angle KBN=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}AB\cdot\frac{1}{3}BC\cdot\sin\angle ABC=\frac{1}{9}AB\cdot BC\sin\angle ABC$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle KBN}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC}{\frac{1}{9}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC}=\frac{9}{2}$$

$$S_{\triangle KBN}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{9}\cdot 36=8 \text{ (кв. ед)}$$

Ответ: 8

Задача 11

Найдите наименьший корень уравнения $\frac{x^4-5x^2+4}{x^3+8}=0.$

Решение

$$\frac{x^4-5x^2+4}{x^3+8}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x^4-5x^2+4=0\\ x^3+8\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2=1\\ x^2=4\end{array}\right.\\ x+2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\\ x=-2\\ x=2\end{array}\right.\\ x\neq -2\end{cases} \Leftrightarrow x\in\{-1;1;2\}$$

Наименьший корень равен $-1.$

Ответ: $-1.$

Задача 12

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=$$

Решение

Используя формулу сокращённого умножения $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$ выделим под знаками радикалов кубы двучленов

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=\sqrt[3]{1+9+3\sqrt{3}+3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{1+9-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt[3]{1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{1-3\sqrt{3}+9-3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{3}\right)^3}=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2$$

или

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=x$$

$$\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}\right)^3=x^3$$

$$x^3 = 10+6\sqrt{3}+3\sqrt[3]{\left(10+6\sqrt{3}\right)\cdot\left(10-6\sqrt{3}\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{\left(10+6\sqrt{3}\right)}+\sqrt[3]{\left(10-6\sqrt{3}\right)}\right)+10-6\sqrt{3}$$

$$x^3 = 20+3\sqrt[3]{100-36\cdot 3}\cdot x$$

$$x^3 = 20+3\sqrt[3]{-8}\cdot x$$

$$x^3 = 20+3\cdot(-2)\cdot x$$

$$x^3 = 20-6x$$

$$x^3+6x-20=0$$

$$x^3-2x^2+2x^2-4x+10x-20=0$$

$$x^2(x-2)+2x(x-2)+10\cdot(x-2)=0$$

$$(x-2)\cdot\left(x^2+2x+10\right)=0$$

$$x-2=0$$

$$x=2$$

или

$$x^2+2x+10=0$$

$$\frac{D}{4}=1-10<0,\ \varnothing$$

Ответ: 2

Задача 13

Если пять одинаковых футболок дешевле одной куртки на 15%, то на сколько процентов четыре таких футболки дешевле одной куртки?

Решение

Стоимость пяти одинаковых футболок составляет $100\%-15\%=85\%$ стоимости куртки.

Стоимость одной футболки составляет $85\%:5=17\%$ стоимости куртки, а стоимость четырёх таких футболок составляет $17\%\cdot 4=68\%$ стоимости куртки, что на $100\%-68\%=32\%$ меньше стоимости куртки.

Ответ: на 32%

Задача 14

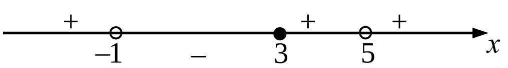
Функция $f(x)$ задана формулой $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{(5-x)^3\cdot(x-3)}{(1+x)\cdot(x-5)}}$.

Чему равна сумма целых чисел, входящих в область определения функции $f(x)$?

Решение

Корень чётной степени определен для неотрицательных чисел. Решим неравенство

$$\frac{(5-x)^3\cdot(x-3)}{(1+x)\cdot(x-5)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-5)^2\cdot(x-3)}{(x+1)}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x\le 3\\ x\ne 5\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-1;3]\cup$$



$$D(f)=(-1;3]\cup$$

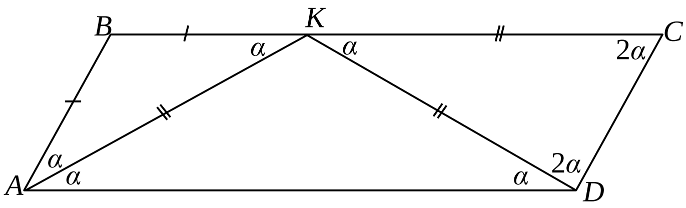
Сумма целых чисел, входящих в область определения функции $0+1+2+3=6$

Ответ: 6

Задача 15

Точка K принадлежит стороне BC параллелограмма $ABCD$. Если $AB = BK$, $AK = KD$ и $AD = AB + AK$, то градусная мера угла BCD равна

Дано: $ABCD$ – параллелограмм



$K \in BC$

$AB = BK$

$AK = KD$

$AD = AB + AK$

Найти $\angle BCD$

Решение

$AB = BK$, по свойству равнобедренного треугольника, в $\triangle ABK$ $\angle BAK = \angle BKA = \alpha$ (обозначим).

$\angle KAD = \angle BKA = \alpha$ как накрестлежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AK.

$AK = KD$, в $\triangle AKD$ $\angle KAD = KDA = \alpha$.

$\angle CKD = \angle KDA = \alpha$ как накрестлежащие при $BC \parallel AD$ и секущей KD.

$AD = AB + AK$.

$AD = BC$ по свойству параллелограмма

Т.о. $BC = AB + AK = BK + AK = BK + KD$.

С другой стороны

$BC = BK + KC$

Т.о. $KC = KD$

$\angle BCD = \angle BAD = 2\alpha$ по свойству параллелограмма.

В $\triangle KCD$ $\angle KDC = \angle KCD = 2\alpha$ по свойству равнобедренного треугольника

Т.о. в $\triangle KCD$

$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180$

$5\alpha = 180$

$\alpha = 36$

$\angle BCD = 2\alpha = 2 \cdot 36° = 72°$

Ответ: 72°

Задача 16

Если $|x+5| - |x+1| = 0$, то $|x+6| - |x+2| =$

Решение

$$|x+5| - |x+1| = 0 \Leftrightarrow |x+5| = |x+1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+5 = x+1 \\ x+5 = -x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \cdot x = -4 \\ 2x = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -3$$

$$|x+6| - |x+2| = |-3+6| - |-3+2| = 3 - 1 = 2$$

Ответ: 2

Задача 17

Найдите произведение всех целых чисел, которые входят в область значений функции $f(x)=5+\sin^2 x-2\cos^2 x$.

Решение

$f(x)=5+\sin^2 x-2\cos^2 x=5+\sin^2 x-2\cdot\left(1-\sin^2 x\right)=5+\sin^2 x-2+2\sin^2 x=3+3\sin^2 x$

При любых значениях x

$-1\le\sin x\le 1$

$0\le\sin^2 x\le 1$

$0\le 3\sin^2 x\le 3$

$3\le 3+3\sin^2 x\le 6$

$E(f)=[3;6]$

Произведение всех целых чисел, которые входят в область значений функции $3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=18\cdot 20=360$

Ответ: 360

Задача 18

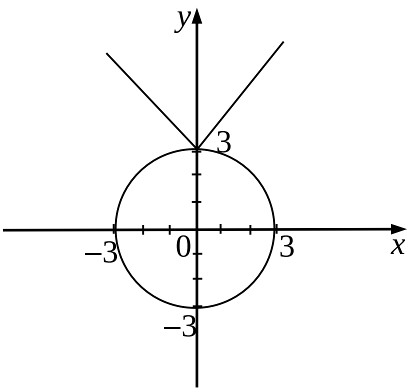
При каком значении параметра a система уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=9\\ y=|x|+a\end{cases}$ имеет одно решение?

Решение

$$\begin{cases}x^2+y^2=9\\ y=|x|+a\end{cases}$$

Удобно решать графически. График первого уравнения $x^2+y^2=9$ окружность с центром в точке $(0;0)$ и радиусом 3.

График второго уравнения получается из графика функции $y=|x|$ сдвигом на a единиц вдоль оси Oy.



Графики первого и второго уравнения имеют одну общую точку при $a=3$

Ответ: 3

Задача 19

Пять мальчиков – Анвара, Бориса, Максата, Руслана и Тимура – нужно посадить на скамейку.

Сколькими способами это можно сделать, если Анвар должен сидеть с краю?

Решение

Если Анвар будет сидеть на скамейке с левого края, то для остальных ребят существует 4! способов рассадки.

Если Анвар будет сидеть на скамейке с правого края, то для остальных мальчиков опять 4! способов рассадки.

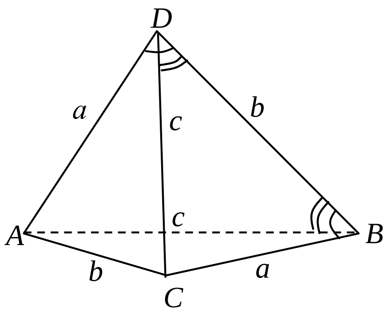
Т.о. всех мальчиков при условии, что Анвар сидит с краю можно рассадить
$2\cdot 4! = 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 48$ (способами)

Ответ: 48

Задача 20

В треугольной пирамиде $DABC$ $\angle ADB = \angle DBC$, $\angle ABD = \angle BDC$, $\angle ABC = \angle BAD$.

Если периметр треугольника ABC равен 15 см, то чему равна сумма длин всех ребер пирамиды $DABC$?



Дано: $DABC$

$\angle ADB = \angle DBC$

$\angle ABD = \angle BDC$

$\angle ABC = \angle BAD$

$P_{\triangle ABC} = 15$см

Найти сумму длин всех рёбер пирамиды $DABC$

Решение

$\triangle ADB = \triangle DBC$ по стороне и двум прилежащим углам (BD – общая сторона, $\angle ADB = \angle DBC$, $\angle ABD = \angle BDC$)

Значит, $BC = AD$

Аналогично $AC = DB$, $AB = DC$

Т.о. $AB + BC + AC + DC + AD + DB = 15\cdot 2 = 30$(см)

Ответ: 30 см

Задача 21

Если из всех трёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2 и 3 так, что цифры в числе не повторяются, наугад выбрать одно, то какова вероятность того, что в выбранном числе цифры 1 и 2 стоят рядом?

Решение

Вероятность того, что событие А произойдёт при проведении некоторого эксперимента

$P(A) = \dfrac{m}{n}$, где

m – число всех исходов эксперимента, в которых наступает событие A,
n – число всех возможных исходов этого эксперимента.
В задаче $m = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad n = 2 \cdot 2! = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$