Математика боюнча окуучулардын Республикалык олимпиадасынын райондук этабынын баалоо критерийлери.

I тур

Кыскача жазылган туура жооп үчүн катышуучуга 1 упай берилет.

№	Туура жооп	Упайлардын саны
1.	1	1
2.	–12	1
3.	12	1
4.	18	1
5.	1023467895	1
6.	29	1
7.	380	1
8	$\frac{1}{6}$	1
9	$x^2-4x+1=0$ **же** $ax-4ax+a=0,$ эгерде $a\neq 0$ болсо, **же** коэффициенттери $1;-4;1$ сандарына пропорционалдуу болгон каалагандай квадраттык теңдеме	1
10	8 **же** 8 кв. бирдик	1
11	–1	1
12	2	1
13	32% га **же** 32	1
14	6	1
15	72° **же** 72	1
16	2	1
17	360	1
18	3	1
19	48	1
20	30 см **же** 30	1
21	$\frac{2}{3}$	1
Бардыгы		21 упай

Математика боюнча тапшырмалардын чыгарылышы

1-маселе

2019^{2020} саны кайсы цифра менен аяктайт?

Чыгарылышы:

$2019^{2020}=\left(2019^2\right)^{1010}$ 2019^2 саны 1 цифрасы менен аяктайт. Демек, анын ар бир даражасы дагы 1 цифрасы менен аяктайт.

Жообу: 1

2-маселе

Эгерде $\left(\frac{1}{2}\right)^x=8^4$ болсо, анда $x=$

Чыгарылышы:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=8^4 \Leftrightarrow \left(2^{-1}\right)^x=\left(2^3\right)^4 \Leftrightarrow 2^{-x}=2^{12} \Leftrightarrow -x=12 \Leftrightarrow x=-12$$

Жообу: -12

3-маселе

Он беш сандын арифметикалык орточосу 10го барабар, ал эми башка он сандын арифметикалык орточосу 15ке барабар.

Бардык жыйырма беш сандын арифметикалык орточосун тапкыла.

Чыгарылышы

Он беш сандын арифметикалык орточосу 10го барабар, демек, алардын суммасы $10\cdot 15=150$ гө барабар.

Башка он сандын арифметикалык орточосу 15ке барабар, демек, алардын суммасы $15\cdot 10=150$ гө барабар

Бардык жыйырма беш сандын суммасы $150+150=300$ гө барабар, ал эми алардын арифметикалык орточосу $\frac{300}{25}=12$ ге барабар.

Жообу: 12

4-тапшырма

Эгерде $x+y=3,\ x^2+y^2=7$ болсо, анда $x^3+y^3=$

Чыгарылышы:

$x+y=3,\ x^2+y^2=7$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$7=3^2-2xy$

$2xy=9-7$

$2xy=2$

$xy=1$

$x^3+y^3=(x+y)\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)=3\cdot(7-1)=18$

же

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2=(x+y)^3-3xy\cdot(x+y)=3^3-3\cdot1\cdot3=27-9=18$$

же

$\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=7 \end{cases}$ системасын чыгарып, x^3+y^3 туюнтмасына x жана y маанилерин коюп туруп эсептеш керек.

Жообу: 18

5-маселе

Жазуусунда бардык он цифра жолуккан жана 15ке калдыксыз бөлүнгөн сандардын эң кичине натуралдык саны канчага барабар?

Чыгарылышы:

Эгерде сан 3кө жана 5ке калдыксыз бөлүнсө, анда сан 15ке калдыксыз бөлүнөт (анткени 3 жана 5 – өз ара жөнөкөй сандар).

$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, демек эгерде он цифранын ар бири бир жолу гана жолукса, сан 3кө калдыксыз бөлүнөт.

Бул сан 5ке калдыксыз бөлүнүш үчүн, аны жазгандагы акыркы цифрасы же 0, же 5 болушу керек.

Мындай сандын эң кичинекейи 1023467895 саны болот.

Жообу: 1023467895

6-маселе

x жана y – натуралдык сандар.

Эгерде $8x+7y=31$ болсо, анда $7x+8y=$

Чыгарылышы:

$8x+7y=31$

$8x=31-7y$

$8x$ – жуп сан болсо, анда $(31-7y)$ – жуп сан, демек, $y-$ так сан

$31-7y\geq 8,$ анткени x – маселенин шарты боюнча натуралдык сан,

демек, $-7y\geq -23,\ \ y\leq \frac{23}{7}.$

$y-$маселенин шарты боюнча натуралдык сан, демек, $y=1$ же $y=3.$

1) Эгерде $y=1,\ \ x=3$

2) Эгерде $y=3$ болсо, анда $x=\frac{5}{4}$ натуралдык сан боло албайт

Демек, $x=3, y=1$

$7x+8y=7\cdot3+8\cdot1=29$

же

$31=8x+7y$

Тандоо жолу менен $31 = 7+7+7+7+3 = 7+(7+1)+(7+1)+(7+1) = 7+8+8+8 = 7+8\cdot 3,$
демек, $x=3,\ y=1$
Демек, $7x+8y = 7\cdot 3+8\cdot 1 = 21+8 = 29$
Жообу: 29

7-маселе
Геометриялык прогрессиянын бешинчи мүчөсү 20га барабар, ал эми анын сегизинчи мүчөсү 19га барабар. Бул прогрессиянын үчүнчү жана онунчу мүчөлөрүнүн көбөйтүндүсүн тапкыла.

Чыгарылышы:

Чектүү геометриялык прогрессиянын касиети боюнча: прогрессиянын чегинин башынан аягына чейин бирдей аралыкта болгон геометриялык прогрессиянын мүчөлөрүнүн көбөйтүндүсү ар дайым туруктуу, башкача айтканда:

$b_3 \cdot b_{10} = b_5 \cdot b_8 = 20\cdot 19 = 380,$

мында $b_n -$ геометриялык прогрессиянын n-дик мүчөсү

же

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$

мында $q -$ геометриялык прогрессиянын бөлүмү

$b_3 = b_1 \cdot q^2,$

$b_{10} = b_1 \cdot q^9,$

$b_3 \cdot b_{10} = b_1 q^2 \cdot b_1 q^9 = b_1^2 q^{11}.$

$b_5 = b_1 \cdot q^4,$

$b_8 = b_1 \cdot q^7,$

$b_5 \cdot b_8 = b_1 q^4 \cdot b_1 q^7 = b_1^2 q^{11}.$

$b_3 \cdot b_{10} = b_5 \cdot b_8 = 20\cdot 19 = 380$

же

$\begin{cases} b_1 q^4 = 20 \\ b_1 q^7 = 19, \end{cases}$ системасын чыгарып,

b_1 жана q ну таап, андан кийин $b_3 \cdot b_{10}$ көбөйтүндүсүн табуу керек

Жообу: 380

8-маселе
Үйдүн ичин оңдоо иштеринде биринчи күнү 10 жумушчу, ал эми экинчи күнү бул бригаданын жарымы иштеген. Бүтпөй калган иштерди үчүнчү күнү 3 жумушчу жасап бүтүргөн. Эгерде ар бир жумушчу күн сайын бирдей көлөмдөгү жумушту аткарса, анда үчүнчү күнү бардык жумуштун канча бөлүгү жасалган?

Чыгарылышы:

Жумуштун көлөмү – иштеп жаткан жумушчулардын санына түз пропорционалдуу.

Демек, жумуштун көлөмү 10:5:3 катышында бөлүнөт. Демек, $\frac{3}{10+5+3}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$.

же

Эгерде жумуштун бардык көлөмүн 1 деп кабыл алсак, анда бир жумушчунун өндүрүмдүүлүгү бир күндө жумуштун $\frac{1}{18}$ бөлүгүн түзөт, анткени бардык жумушту шарттуу түрдө $10+\frac{1}{2}\cdot 10+3=18$ (жумушчу) жасаган. Ошондо 3 жумушчу үчүнчү күнү жумуштун $3\cdot\frac{1}{18}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$ бөлүгүн жасаган болот.

Жообу: $\frac{1}{6}$

9-маселе

Тамырларынын бири $2+\sqrt{3}$ кө барабар болгон бүтүн коэффициенттери бар квадраттык теңдемени жазгыла.

Чыгарылышы:

Эгерде теңдеменин экинчи тамыры $2-\sqrt{3}$ кө барабар болсо, анда квадраттык теңдеменин коэффициенттери бүтүн сандар болот.

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=1$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=4$$

Виеттин теоремасына тескери теорема боюнча маселенин шартын $x^2-4x+1=0$ теңдемеси канааттандырат.

же коэффициенттери $1;-4;1$ сандарына пропорционалдуу болгон квадраттык теңдеме канааттандырат.

же a – нөлдөн башка каалагандай сан болгон $ax^2-4ax+a=0.$

Жообу: $x^2-4x+1=0$ же коэффициенттери $1;-4;1$ сандарына пропорционалдуу болгон квадраттык теңдеме.

10-маселе

ABC үч бурчтугунун AB жана BC жактарында K жана N чекиттери алынган.

$AK:KB=BN:NC=1:2.$

Эгерде ABC үч бурчтугунун аянты 36га барабар болсо, анда KBN үч бурчтугунун аянты канчага барабар болот?

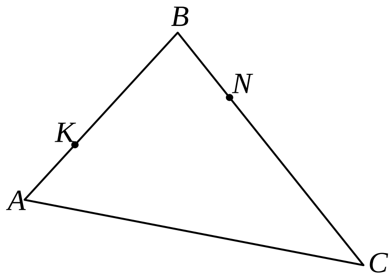
Берилди: $\triangle ABC$

$K \in AB;\ N \in BC$

$AK : KB = BN : NC = 1:2$

$S_{\triangle ABC} = 36$

$S_{\triangle KBN}$ тапкыла.



Чыгарылышы:

$AK : KB = 1:2$, демек, $KB = \frac{2}{3}AB.$

Ушуга окшош эле $BN = \frac{1}{3}BC.$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC$$

$$S_{\triangle KBN} = \frac{1}{2}KB \cdot BN \cdot \sin\angle KBN = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}AB\cdot\frac{1}{3}BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{9}AB \cdot BC \sin\angle ABC$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle KBN}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC}{\frac{1}{9}AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC} = \frac{9}{2}$$

$S_{\triangle KBN} = \frac{2}{9}S_{\triangle ABC} = \frac{2}{9}\cdot 36 = 8$ (кв. бирдик)

Жообу: 8

11-маселе

$\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 8} = 0$ теңдемесинин эң кичине тамырын тапкыла.

Чыгарылышы:

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 8} = 0 \iff \begin{cases} x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \\ x^3 + 8 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right. \\ x \neq -2 \end{cases} \iff x \in \{-1; 1; 2\}$$

Теңдеменин эң кичине тамыры -1 ге барабар.

Жообу: -1.

12-маселе

$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=$

Чыгарылышы:

Кыскартылган көбөйтүүнүн формуласын колдонуп $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ радикалдардын белгилеринин астына эки мүчөлөрдүн кубдарын белгилейбиз.

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=\sqrt[3]{1+9+3\sqrt{3}+3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{1+9-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}}=$$
$$=\sqrt[3]{1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{1-3\sqrt{3}+9-3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{3}\right)^3}=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2$$

же

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=x$$
$$\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}\right)^3=x^3$$
$$x^3=10+6\sqrt{3}+3\sqrt[3]{\left(10+6\sqrt{3}\right)\cdot\left(10-6\sqrt{3}\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{\left(10+6\sqrt{3}\right)}+\sqrt[3]{\left(10-6\sqrt{3}\right)}\right)+10-6\sqrt{3}$$
$$x^3=20+3\sqrt[3]{100-36\cdot 3}\cdot x$$
$$x^3=20+3\sqrt[3]{-8}\cdot x$$
$$x^3=20+3\cdot(-2)\cdot x$$
$$x^3=20-6x$$
$$x^3+6x-20=0$$
$$x^3-2x^2+2x^2-4x+10x-20=0$$
$$x^2(x-2)+2x(x-2)+10\cdot(x-2)=0$$
$$(x-2)\cdot\left(x^2+2x+10\right)=0$$
$$x-2=0$$
$$x=2$$

же

$$x^2+2x+10=0$$
$$\frac{D}{4}=1-10<0,\ \varnothing$$

Жообу: 2

13-маселе

Эгерде беш бирдей футболка бир күрмөдөн 15%га арзан болсо, анда төрт ушундай футболка бир күрмөдөн канча пайызга арзан болот?

Чыгарылышы:

Беш бирдей футболканын баасы күрмөнүн баасынын $100\%-15\%=85\%$ ын түзөт.

Бир футболканын баасы күрмөнүн баасынын $85\%:5=17\%$ ын түзөт, ал эми ушундай төрт футболканын баасы күрмөнүн баасынын $17\%\cdot 4=68\%$ ын түзөт. Бул күрмөнүн баасынан $100\%-68\%=32\%$ га аз.

Жообу: 32%га

14-маселе

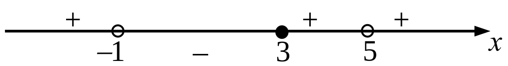
$f\left(x\right)$ функциясы $f\left(x\right)=\sqrt[4]{\dfrac{\left(5-x\right)^3\cdot\left(x-3\right)}{\left(1+x\right)\cdot\left(x-5\right)}}$ формуласы менен берилген.

$f\left(x\right)$ функциясынын аныкталуу областына кирген бүтүн сандардын суммасы канчага барабар?

Чыгарылышы:

Жуп даражанын тамыры терс эмес сандар үчүн аныкталган.
Барабарсыздыкты чыгарабыз:

$$\frac{\left(5-x\right)^3\cdot\left(x-3\right)}{\left(1+x\right)\cdot\left(x-5\right)}\ge 0\Leftrightarrow\frac{-\left(x-5\right)^2\cdot\left(x-3\right)}{\left(x+1\right)}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x\le 3\\ x\ne 5\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-1;3\right]\cup$$



$D\left(f\right)=\left(-1;3\right]\cup$

Функциянын аныкталуу областына кирген бүтүн сандардын суммасы $0+1+2+3=6$.

Жообу: 6

15-маселе

K чекити $ABCD$ параллелограммынын BC жагына тиешелүү. Эгерде $AB=BK,\ AK=KD$ жана $AD=AB+AK$ болсо, анда BCD бурчунун градустук чени канчага барабар?

Берилди: $ABCD$ параллелограммы

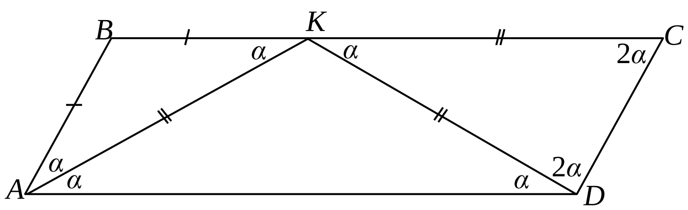
$K\in BC$

$AB=BK$

$AK=KD$

$AD=AB+AK$

$\angle BCD$ ны тапкыла



Чыгарылышы:

Тең капталдуу үч бурчтуктун касиети боюнча $AB=BK,\ ABK$ үч бурчтугунда $\angle BAK=\angle BKA=\alpha$ (белгилейбиз).

$BC\parallel AD$ жана AK – кесип өтүүчү түз сызык болгон шартта кайчылаш жаткан бурчтар катары $\angle KAD=\angle BKA=\alpha$.

$AK=KD,\ AKD$ үч бурчтугунда $\angle KAD=KDA=\alpha.$

$BC\parallel AD$ жана KD – кесип өтүүчү түз сызык болгон шартта кайчылаш жаткан бурчтар катары $\angle CKD=\angle KDA=\alpha$.

$AD=AB+AK.$

Параллелограммдын касиети боюнча $AD = BC.$

Демек, $BC = AB + AK = BK + AK = BK + KD.$

Башка жагынан алсак,

$BC = BK + KC$

Демек, $KC = KD$

Параллелограммдын касиети боюнча $\angle BCD = \angle BAD = 2\alpha$.

KCD үч бурчтугунда тең капталдуу үч бурчтуктун касиети боюнча $\angle KDC = \angle KCD = 2\alpha$.

Демек, KCD үч бурчтугунда

$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180$

$5\alpha = 180$

$\alpha = 36$

$\angle BCD = 2\alpha = 2 \cdot 36° = 72°$

Жообу: 72°

16-маселе

Эгерде $|x+5| - |x+1| = 0$ болсо, анда $|x+6| - |x+2| =$

Чыгарылышы:

$$|x+5| - |x+1| = 0 \Leftrightarrow |x+5| = |x+1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+5 = x+1 \\ x+5 = -x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \cdot x = -4 \\ 2x = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -3$$

$$|x+6| - |x+2| = |-3+6| - |-3+2| = 3 - 1 = 2$$

Жообу: 2

17-маселе

$f(x) = 5 + \sin^2 x - 2\cos^2 x$ функциясынын маанилеринин областына кирген бардык бүтүн сандардын көбөйтүндүсүн тапкыла.

Чыгарылышы:

$$f(x) = 5 + \sin^2 x - 2\cos^2 x = 5 + \sin^2 x - 2 \cdot (1 - \sin^2 x) = 5 + \sin^2 x - 2 + 2\sin^2 x = 3 + 3\sin^2 x$$

x тин каалагандай маанисинде

$-1 \le \sin x \le 1$

$0 \le \sin^2 x \le 1$

$0 \le 3\sin^2 x \le 3$

$3 \le 3 + 3\sin^2 x \le 6$

$E(f) = [3;6]$

Функциянын маанилеринин областына кирген бардык бүтүн сандардын көбөйтүндүсү

$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 18 \cdot 20 = 360.$

Жообу: 360

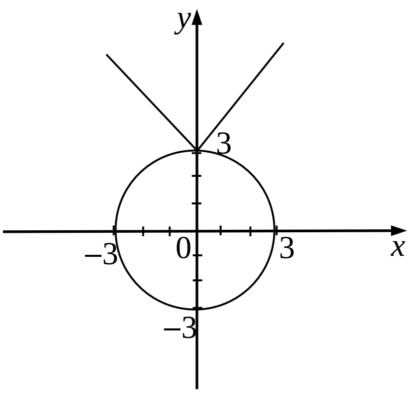
18-маселе

$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=|x|+a \end{cases}$ теңдемелер системасы a параметринин кайсы маанисинде бир чыгаралышка ээ болот?

Чыгарылышы:

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=|x|+a \end{cases}$$

Маселени графикалык түрдө чыгаруу ыңгайлуу.
Биринчи $x^2+y^2=9$ теңдемесинин графиги борбору $(0;0)$ чекитинде жана радиусу 3 болгон айлана.
Oy огунун узатасынан a бирдикке жылдырып, $y=|x|$ функциясынын графигинен экинчи теңдеменин графигин алабыз.



Биринчи жана экинчи теңдемелердин графиктери $a=3$ шартында бир жалпы чекитке ээ.

Жообу: 3

19-маселе

Анвар, Борис, Максат, Руслан жана Тимур аттуу беш баланы скамейкага отургузуш керек. Эгерде Анвар четинде отуруш керек болсо, анда балдарды канча ыкма менен отургузуу мүмкүн?

Чыгарылышы:

Эгерде Анвар скамейканын сол жагындагы четине отурса, анда калган балдар үчүн отургузуунун $4!$ ыкмасы бар болот.

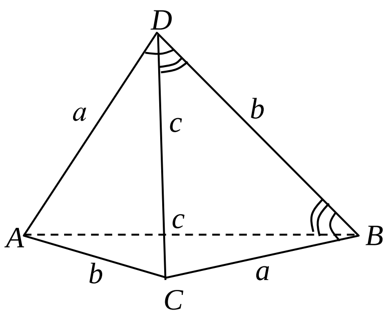
Эгерде Анвар скамейканын оң тарабындагы четине отурса, анда калган балдар үчүн кайра эле отургузуунун $4!$ ыкмасы бар болот.

Демек, Анвар скамейканын четине отуруш керек болгон шартта, бардык калган балдарды $2\cdot 4!=2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=48$ ыкма менен отургузуу мүмкүн.

Жообу: 48

20-маселе

$DABC$ үч бурчтук пирамидасында $\angle ADB = \angle DBC, \quad \angle ABD = \angle BDC, \quad \angle ABC = \angle BAD.$
Эгерде ABC үч бурчтугунун периметри 15 см-ге барабар болсо,
анда $DABC$ пирамидасынын бардык кырларынын узундуктарынын суммасы канчага барабар болот?



Берилди: $DABC$

$\angle ADB = \angle DBC$

$\angle ABD = \angle BDC$

$\angle ABC = \angle BAD$

$P_{\triangle ABC} = 15\text{см}$

$DABC$ пирамидасынын бардык кырларынын узундуктарынын суммасын тапкыла.

Чыгарылышы:

Жагы боюнча жана эки жанаша жаткан бурчтары боюнча $\triangle ADB = \triangle DBC$ ($BD -$ жалпы жагы, $\angle ADB = \angle DBC, \angle ABD = \angle BDC$)

Демек, $BC = AD$

Ошондой эле $AC = DB, \quad AB = DC$

Демек, $AB + BC + AC + DC + AD + DB = 15 \cdot 2 = 30(\text{см})$

Жообу: 30 см

21-маселе

Эгерде сандардагы цифралар кайталанбагандай болуп 1, 2 жана 3 цифраларынан түзүлгөн бардык үч орундуу сандардан ойлонбой туруп бирөөнү тандап алса, анда тандалып алынган санда 1 жана 2 цифралары чогуу туруп калышынын ыктымалдуулугу кандай?

Чыгарылышы:

Кайсы бир экспериментти өткөрүү учурунда А окуясынын болуу ыктымалдуулугу

$P(A) = \frac{m}{n}$, мында:

$m - A$ окуясы боло турган эксперименттин бардык натыйжаларынын саны,

$n -$ бул эксперименттин бардык ыктымалдуу болгон натыйжаларынын саны.

Маселеде $m = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad n = 2 \cdot 2! = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$

$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Жообу: $\frac{2}{3}$