Математика боюнча окуучулардын Республикалык олимпиадасынын областтык этабынын чыгарылыштары. Стендге илиш үчүн.

II тур

1-маселе.

1) Теңдемелер системасын бүтүн сандар менен чыгаргыла

$$\begin{cases}(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x+t)=4,\\(y+x)\cdot(y+z)\cdot(y+t)=0,\\(z+x)\cdot(z+y)\cdot(z+t)=3.\end{cases}$$

Чыгарылышы:

1) Системанын биринчи теңдемесинен $y+x\neq 0$, үчүнчү теңдемесинен $y+z\neq 0$ экендиги түшүнүктүү. Демек, $y+t=0,\ t=-y.$

Система төмөнкү түргө келет:

$$\begin{cases}(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4,\\t=-y,\\(z+x)\cdot(z+y)\cdot(z-y)=3.\end{cases}$$

2) $(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4$ теңдемесин бүтүн сандар менен чыгарабыз

3 жана 4 сандары өз ара жөнөкөй, ал эми $(x+z)$ – алардын жалпы бөлүүчүсү болгондуктан, $x+z=1$ же $x+z=-1.$

Төмөнкү учурду карап чыгалы:

$$\begin{cases}(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4,\\x+z=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)\cdot(x-y)=4,\\x+z=1.\end{cases}$$

$(x+y)\cdot(x-y)=4$ теңдемесин бүтүн сандар менен чыгарабыз

$(x+y)$ жана $(x-y)$ сандары бирдей жуптагы сандар. Ал эми алардын көбөйтүндүсү 4кө барабар болгондуктан, бул эки сан тең жуп сандар. Демек, $x+y=\pm 2,\ x-y=\pm 2$ учурларын карап чыгуу жетиштүү.

$$a)\ \begin{cases}x+y=2,\\x-y=2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=4,\\x-y=2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2,\\y=0.\end{cases}$$

Бул учурда $z=-1.$

б) $\begin{cases} x+y=-2, \\ x-y=-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-4, \\ x-y=-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ y=0. \end{cases}$

Бул учурда $z=3$.

Төмөнкү учурду карап чыгабыз:

$$\begin{cases} (x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4, \\ x+z=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\cdot(x-y)=-4, \\ x+z=-1. \end{cases}$$

$(x+y)\cdot(x-y)=-4$ теңдемесин бүтүн сандар менен чыгарабыз

$(x+y)$ жана $(x-y)$ сандары – бирдей жуптагы сандар. Ал эми алардын көбөйтүндүсү -4кө барабар болгондуктан, бул эки сан тең жуп сандар. Демек, $x+y=\pm 2,\ x-y=\mp 2$ учурларын карап чыгуу жетиштүү.

в) $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0, \\ x-y=-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=2. \end{cases}$

Бул учурда $z=-1$.

г) $\begin{cases} x+y=-2, \\ x-y=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0, \\ x-y=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=-2. \end{cases}$

Бул учурда $z=-1$.

3) Табылган z жана y маанилерин $(z+y)\cdot(z-y)=3$ же $(z+y)\cdot(z-y)=-3$ теңдемелерине коюп көрөлү.

а) $z=-1,\ y=0$ шартында $(z+y)\cdot(z-y)=3$ теңдемеси жалган барабардыкка айланат.

б) $z=3,\ y=0$ маанилерин $(z+y)\cdot(z-y)=3$ теңдемесине койсок, жалган барабардыкты алабыз.

в) $z=-1,\ y=2$ маанилерин $(z+y)\cdot(z-y)=-3$ теңдемесине койсок, туура барабардык болот.

г) $z=-1,\ y=-2$ маанилерин $(z+y)\cdot(z-y)=-3$ теңдемесине койсок, туура барабардыкты алабыз.

4) Демек,

$$\begin{cases} (x+y)\cdot(x+z)\cdot(x+t)=4, \\ (y+x)\cdot(y+z)\cdot(y+t)=0, \\ (z+x)\cdot(z+y)\cdot(z+t)=3 \end{cases}$$

теңдемелеринин системасы бүтүн сандар менен берилген эки чыгарылышка ээ:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=2, \\ z=-1, \\ t=-2 \end{cases} \text{ жана } \begin{cases} x=0, \\ y=-2, \\ z=-1, \\ t=2. \end{cases}$$

Жообу: $(0,2,-1,-2)$; $(0,-2,-1,2)$

же

1) Системасынын биринчи теңдемесинен $y+x\neq 0$ экендиги,
үчүнчү теңдемесинен $y+z\neq 0$ экендиги белгилүү болду. Демек, $y+t=0,\ t=-y$.

Система төмөнкү түргө ээ болот:

$$\begin{cases} (x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4, \\ t=-y, \\ (z+x)\cdot(z+y)\cdot(z-y)=3. \end{cases}$$

2) $(z+x)\cdot(x+y)\cdot(z-y)=3$ теңдемесин бүтүн сандар менен чыгарабыз.

3 жана 4 сандары өз ара жөнөкөй сандар, ал эми $(x+z)$ – алардын бөлүүчүсү болгондуктан, $x+z=1$ же $x+z=-1$.

Бул учурду карап чыгабыз:

$$\begin{cases} x+z=1, \\ (z+x)\cdot(z+y)\cdot(z-y)=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=1, \\ (z+y)\cdot(z-y)=3. \end{cases}$$

$(z+y)\cdot(z-y)=3$ теңдемесин бүтүн сандар менен чыгарабыз

$$а)\begin{cases} z+y=3, \\ z-y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=4, \\ z-y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2, \\ y=1. \end{cases}$$

Бул учурда: $x=-1$.

$$б)\begin{cases} z+y=1, \\ z-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=4, \\ z-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2, \\ y=-1. \end{cases}$$

Бул учурда: $x=-1$.

$$в)\begin{cases} z+y=-3, \\ z-y=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=-4, \\ z-y=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2, \\ y=-1. \end{cases}$$

Бул учурда: $x=3$.

$$г)\begin{cases} z+y=-1, \\ z-y=-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=-4, \\ z-y=-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2, \\ y=1. \end{cases}$$

Бул учурда: $x=3$.

Төмөнкү учурду карап чыгабыз:

$$\begin{cases} x+z=-1, \\ (z+x)\cdot(z+y)\cdot(z-y)=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=-1, \\ (z+y)\cdot(z-y)=-3. \end{cases}$$

$(z+y)\cdot(z-y)=-3$ теңдемесин бүтүн сандар менен чыгарабыз

$$д)\begin{cases} z+y=-3, \\ z-y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=-2, \\ z-y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-1, \\ y=-2. \end{cases}$$

Бул учурда: $x=0.$

$$e)\begin{cases} z+y=1, \\ z-y=-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=-2, \\ z-y=-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-1, \\ y=2. \end{cases}$$

Бул учурда: $x=0.$

$$ж)\begin{cases} z+y=3, \\ z-y=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=2, \\ z-y=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1, \\ y=2. \end{cases}$$

Бул учурда: $x=0.$

$$з)\begin{cases} z+y=-1, \\ z-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=2, \\ z-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1, \\ y=-2. \end{cases}$$

Бул учурда: $x=-2.$

3) а) $x=-1,\ y=1$ маанилерин $(x+y)\cdot(x-y)=4$ теңдемесине коюп көрүп, жалган барабардыкты алабыз.

б) $x=-1,\ y=-1$ маанилерин $(x+y)\cdot(x-y)=4$ теңдемесине коюп көрүп, жалган барабардыкты алабыз.

в) $x=3,\ y=-1$ маанилерин $(x+y)\cdot(x-y)=4$ теңдемесине коюп көрүп, жалган барабардыкты алабыз.

г) $x=3,\ y=1$ маанилерин $(x+y)\cdot(x-y)=4$ теңдемесине коюп көрүп, жалган барабардыкты алабыз.

д) $x=0,\ y=-2$ маанилерин $(x+y)\cdot(x-y)=-4$ теңдемесине коюп көрүп, туура барабардыкты алабыз.

е) $x=0,\ y=2$ маанилерин $(x+y)\cdot(x-y)=-4$ теңдемесине коюп көрүп, туура барабардыкты алабыз.

ж) $x=-2,\ y=2$ маанилерин $(x+y)\cdot(x-y)=-4$ теңдемесине коюп көрүп, жалган барабардыкты алабыз.

з) $x=-2,\ y=-2$ маанилерин $(x+y)\cdot(x-y)=-4$ теңдемесине коюп көрүп, жалган барабардыкты алабыз.

4) Демек,

$$\begin{cases}(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x+t)=4,\\(y+x)\cdot(y+z)\cdot(y+t)=0,\\(z+x)\cdot(z+y)\cdot(z+t)=3.\end{cases}$$

теңдемелеринин системасы бүтүн сандар менен эки чыгарылышка ээ:

$$\begin{cases}x=0,\\y=2,\\z=-1,\\t=-2\end{cases} \text{ жана } \begin{cases}x=0,\\y=-2,\\z=-1,\\t=2.\end{cases}$$

Жообу: $(0,2,-1,-2)$; $(0,-2,-1,2)$.

же

1) Системанын биринчи теңдемесинен $y+x\neq 0$ экендиги,
үчүнчү теңдемесинен $y+x\neq 0$ экендиги белгилүү болду. Демек, $y+t=0$, $t=-y$.

Система төмөнкү түрдө:

$$\begin{cases}(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4,\\t=-y,\\(z+x)\cdot(z+y)\cdot(z-y)=3.\end{cases}$$

2)
$(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4$ же $(z+x)\cdot(z+y)\cdot(z-y)=3$ теңдемелеринин бүтүн сандар менен чыгарып жатып, 3 жана 4 сандарынын бардык мүмкүн болгон берилиштерин үч бүтүн сандын көбөйтүндүсү катары карап чыккыла. Мисалы,

$$3=1\cdot1\cdot3=1\cdot3\cdot1=3\cdot1\cdot1=(-1)\cdot(-1)\cdot3=(-1)\cdot1\cdot(-3)=1\cdot(-1)\cdot(-3)=(-1)\cdot(-3)\cdot1=(-1)\cdot3\cdot(-1)=$$
$$=1\cdot(-3)\cdot(-1)=(-3)\cdot(-1)\cdot1=(-3)\cdot1\cdot(-1)=3\cdot(-1)\cdot(-1).$$

Жана төмөнкү теңдемелер системаларын чыгарабыз:

1) $\begin{cases}z+x=1,\\z+y=1,\\\mathrm{z}-\mathrm{y}=3;\end{cases}$

2) $\begin{cases}z+x=1,\\z+y=3,\\\mathrm{z}-\mathrm{y}=1;\end{cases}$

3) $\begin{cases} z+x=3, \\ z+y=1, \\ \text{z}-\text{y}=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} z+x=-1, \\ z+y=-1, \\ \text{z}-\text{y}=3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} z+x=-1, \\ z+y=1, \\ \text{z}-\text{y}=-3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} z+x=1, \\ z+y=-1, \\ \text{z}-\text{y}=-3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} z+x=-1, \\ z+y=-3, \\ \text{z}-\text{y}=1; \end{cases}$

8) $\begin{cases} z+x=-1, \\ z+y=3, \\ \text{z}-\text{y}=-1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} z+x=1, \\ z+y=-3, \\ \text{z}-\text{y}=-1; \end{cases}$

10) $\begin{cases} z+x=-3, \\ z+y=-1, \\ \text{z}-\text{y}=1; \end{cases}$

11) $\begin{cases} z+x=-3, \\ z+y=1, \\ \text{z}-\text{y}=-1; \end{cases}$

12) $\begin{cases} z+x=3, \\ z+y=-1, \\ \text{z}-\text{y}=-1. \end{cases}$

3) Табылган маанилерди $(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4$ теңдемесине коюп көргүлө.

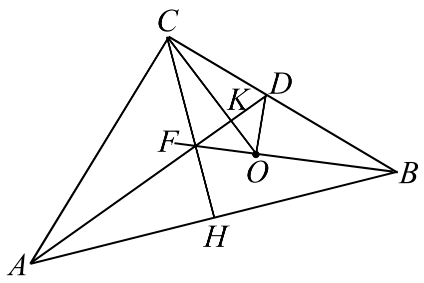
4) Изделип жаткан системанын чыгарылышы болгон бүтүн сандардын төрттүктөрүн тапкыла. Жообун жазгыла.

2-маселе.

Гипотенузасы AB болгон ABC тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтугунда CH жана AD биссектрисалары өткөрүлгөн. O – CHB үч бурчтугуна ичтен сызылган айлананын борбору.

ADO бурчунун чоңдугун тапкыла.

Чыгарылышы:



ABC – тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтук жана CH – гипотенузага өткөрүлгөн биссектриса болгондуктан, $\angle ACF = \angle ACH = \angle DBA = \angle CBA = 45°$.

F – ABC үч бурчтугунун биссектрисалары кесилишкен чекит.

$\angle CAF = \angle DAB, \ \angle ACH = \angle HCB.$

$\angle CFD -$ ACF үч бурчтугунун сырткы бурчу. Үч бурчтуктун сырткы бурчунун чоңдугу жөнүндөгү теорема боюнча $\angle CFD = \angle CAF + \angle ACF$.

$\angle CDA -$ ADB үч бурчтугунун сырткы бурчу. Үч бурчтуктун сырткы бурчунун чоңдугу жөнүндөгү теорема боюнча $\angle CDA = \angle DAB + \angle DBA.$

Демек, $\angle CDF = \angle CDA = \angle CFD.$

Тең капталдуу үч бурчтуктун касиети боюнча FCD үч бурчтугунда $FC = CD.$

CHB үч бурчтугуна ичтен сызылган айлананын борбору бул үч бурчтуктун биссектрисалары кесилишкен чекити болуп эсептелет.

Эгерде C бурчунун CO биссектрисасы FD кесиндисин K чекитинде кесип өтсө, анда CK – FCD үч бурчтугунун FCD бурчунун биссектрисасы. Негизине өткөрүлгөн тең капталдуу үч бурчтуктун биссектрисасынын касиети боюнча ал медианасы дагы, бийиктиги дагы болуп эсептелет. Демек, K чекити FD кесиндисинин ортосу жана $CO \perp FD.$

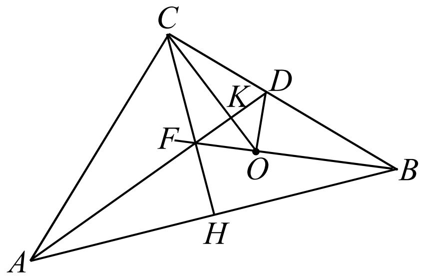
FOD үч бурчтугунда OK медианасы дагы, бийиктиги дагы болуп эсептелет, демек, $FO=OD$ жана $\angle FDO = \angle DFO.$

$\angle DFB -$ AFB үч бурчтугунун сырткы бурчу. Демек, $\angle DFB = \angle FAB + \angle FBA = 45°.$

Демек, $\angle ADO = \angle FDO = \angle DFO = \angle DFB = 45°.$

Жообу: 45°.

же



Гипотенузасы AB болгон ABC тик бурчтуу тең капталдуу үч бурчтугунда
$\angle ACB = 90°,\ \angle CAB = \angle CBA = 45°.$

$F - ABC$ үч бурчтугунун биссектрисалары кесилишкен чекит. Демек, $BF - ABC$ үч бурчтугунун B бурчунун биссектрисасы.

$$\angle FAB = \frac{1}{2}\angle CAB = \frac{1}{2}\cdot 45°;$$

$$\angle FBH = \frac{1}{2}\angle CBA = \frac{1}{2}\cdot 45°.$$

$O - HBC$ үч бурчтугуна ичтен сызылган айлананын борбору $- HBC$ үч бурчтугунун биссектрисалары кесилишкен чекит. $CO - HBC$ үч бурчтугунун HCB бурчунун биссектрисасы.

$$\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCH = \frac{1}{2}\cdot 45°.$$

$\angle DFO - AFB$ үч бурчтугунун сытркы бурчу. Үч бурчтуктун сырткы бурчунун чоңдугу жөнүндөгү теорема боюнча $\angle DFO = \angle FAB + \angle FBA = 45°$.

Дал ошондой эле COB үч бурчтугунун сырткы бурчу $\angle FOC = \angle OCB + \angle OBC = 45^0$.

Анда $\angle FKO = 90^0$ жана $CO \perp FD$.

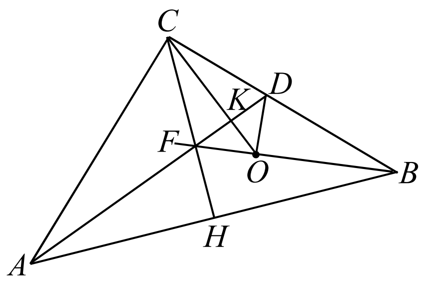
FCD үч бурчтугунда CK – бул биссектриса дагы, бийиктик дагы, демек, медиана дагы. Демек, K чекити – FD кесиндисинин ортосу.

Демек, $OK – FOD$ үч бурчтугунун бийиктиги дагы, медианасы дагы болуп эсептелет. Демек, FOD үч бурчтугу тең капталдуу жана $\angle FDO = \angle DFO = 45^0$.

$\angle ADO = \angle FDO = 45^0$.

Жообу: 45^0.

же



CHB – тик бурчтуу теӊ капталдуу үч бурчтук.

CHB жана ACB үч бурчтуктары окшош.

BF жана AD – тар бурчтардын биссектрисалары, ал эми O жана F чекиттери – CHB жана ACB үч бурчтуктарынын биссектрисалары кесилишкен чекиттер. Мындан $\frac{OF}{FD} = \frac{CH}{CB} \Leftrightarrow \frac{OF}{CH} = \frac{FD}{CB}$.

$\angle DFO - AFB$ үч бурчтугунун сырткы бурчу. Үч бурчтуктун сырткы бурчунун чоӊдугу жөнүндөгү теорема боюнча $\angle DFO = \angle FAB + \angle FBA = 45^0$.

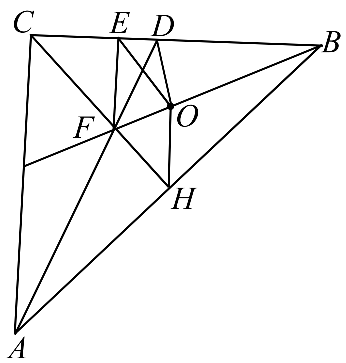
FOD жана CHB үч бурчтуктарын карап чыгалы: $\angle DFO = \angle BCH = 45^0$, $\frac{OF}{CH} = \frac{FD}{CB}$.

Демек, FOD үч бурчтугу CHB үч бурчтугуна окшош жана $\angle FDO = \angle CBH = 45^0$.

$\angle ADO = \angle FDO = 45^0$.

Жообу: 45^0.

же



$F - ABC$ үч бурчтугунун биссектрисалары кесилишкен чекит.

CHB үч бурчтугуна ичтен сызылган айлананын борбору $O - CHB$ үч бурчтуктарынын биссектрисалары кесилишкен чекит.

ACB тең капталдуу үч бурчтугунун негизине өткөрүлгөн CH биссектрисасы анын бийиктиги дагы болуп эсептелет. Демек, $\angle CHB = 90°$.

$HO - \angle CHB$ биссектрисасы.

$\angle FHO = \angle OHB = 45^0$.

Кошумча чийүү: $FE \perp CB,\ E \in CB$ чиебиз, EO кесиндисин чиебиз.

Жайылбаган бурчтун биссектрисасы анын симметрия огу болуп эсептелет. Демек, *FHB* жана *FEB* үч бурчтуктары BF түз сызыгына карата симметриялуу.

Мындан $FE = FH,\ EO = OH,\ \angle EFO = \angle HFO$ жана ЕО $-$ FEB бурчунун биссектрисасы экендиги белгилүү болот.

(Симметриянын касиеттеринин ордуна үч бурчтуктардын тиешелүү касиеттерин пайдаланып, *FBE* жана *FBH* үч бурчтуктарынын, *FEO* жана *FHO* үч бурчтуктарынын барабардыгын далилдеп берсе болот).

Демек, $\angle OEB = \angle FEO = \angle FHO = 45^0$.

$\angle BFD - AFB$ үч бурчтугунун сырткы бурчу. $\angle OFD = \angle BFD = \angle FAB + \angle FBA = 45^0$.

Демек, $\angle OFD = \angle OED$, мындан O, F, E, D чекиттери бир айланада жатары белгилүү болду.

(Чындыгында эле, эгерде *OFD* чекиттери аркылуу айлананы чийсек, анда *OFD* бурчу – ичтен сызылган, *OD* жаасына таянган. Эгерде *E* чекити тегеректин ичинде жатса, анда *OED* бурчунун чоңдугу 45°тан чоң болмок. Ал эми бул чекит тегеректин сыртында жатса, анда *OED* бурчунун чоңдугу 45°тан аз болмок. Демек, *E* чекити *OFD* үч буртугунун сыртынан сызылган айланада жатат.)

Демек, бир *FO* жаасына таянган ичтен сызылган бурчтар катары $\angle FDO = \angle FEO$.

Ошентип, $\angle ADO = \angle FDO = \angle FEO = 45^0$.
Жообу: 45^0.

3-маселе.

Эгерде үч бурчтуктун жактарынын узундуктары a, b, c рационалдуу сандары менен берилсе, анда $\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a \cdot \left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b \cdot \left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c \le 1$ барабарсыздыгы аткарыларын далилдеп бергиле.

Далилдөө:

1) Эгерде $a, b, c -$ үч бурчтуктун жактарынын узундуктары болсо, анда $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

Үч бурчтуктун каалаган жагынын узундугу башка эки жактарынын узундуктарынын суммасынан аз болот, ошондуктан $a + b > c,\ b + c > a,\ c + a > b.$

$1+\frac{b-c}{a}=\frac{a+b-c}{a}$ туюнтмасын карап чыгабыз.

Барабарсыздыктын сол бөлүгүн өзгөртүп, төмөнкү туюнтманы алабыз:

$$\left(\frac{a+b-c}{a}\right)^a\cdot\left(\frac{b+c-a}{b}\right)^b\cdot\left(\frac{c+a-b}{c}\right)^c.$$

$$\frac{a+b-c}{a}>0,\ \ \frac{b+c-a}{b}>0,\ \ \frac{c+a-b}{c}>0.$$

2) a, b, c сандары натуралдык болгон учурдагы барабарсыздыкты далилдеп беребиз.

Каалагандай n оң сандарынын геометриялык орточо саны бул сандардын арифметикалык орточо санынан чоң эмес экендиги белгилүү:

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}\le\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\Leftrightarrow x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\le\left(\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\right)^n.$$

Эгерде a,b,c сандары натуралдык болсо, анда $a+b+c$ саны дагы натуралдык болот.

Берилген барабарсыздыктын сол бөлүгү оң көбөйтүүчүлөрдүн $(a+b+c)$ дааналарынын көбөйтүндүсү болуп эсептелет:

$$\left(\frac{a+b-c}{a}\right)^a\cdot\left(\frac{b+c-a}{b}\right)^b\cdot\left(\frac{c+a-b}{c}\right)^c=$$

$$=\underbrace{\frac{a+b-c}{a}\cdot\ldots\cdot\frac{a+b-c}{a}}_{a\ \text{көбөйтүүчүлөр}}\cdot\underbrace{\frac{b+c-a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{b+c-a}{b}}_{b\ \text{көбөйтүүчүлөр}}\cdot\underbrace{\frac{c+a-b}{c}\cdot\ldots\cdot\frac{c+a-b}{c}}_{c\ \text{көбөйтүүчүлөр}}.$$

Бул сандардын арифметикалык орточо саны төмөнкүгө барабар:

$$\frac{\frac{a+b-c}{a}\cdot a+\frac{b+c-a}{b}\cdot b+\frac{c+a-b}{c}\cdot c}{a+b+c}=\frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

Демек, $\underbrace{\frac{a+b-c}{a}\cdot\ldots\cdot\frac{a+b-c}{a}}_{a}\cdot\underbrace{\frac{b+c-a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{b+c-a}{b}}_{b}\cdot\underbrace{\frac{c+a-b}{c}\cdot\ldots\cdot\frac{c+a-b}{c}}_{c}\le 1^{a+b+c}$

жана $\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a\cdot\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b\cdot\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c\le 1.$

3) a,b,c сандарынын, жок дегенде, бир саны бүтүн эмес сан болгон учурдагы барабарсыздыкты далилдеп көрөлү .

Ар бир рационалдык санды жөнөкөй бөлчөк катары алып карасак болот. Бул бөлчөктөрдү бир бөлүмгө алып келсек болот. Башкача айтканда, $a=\frac{m}{q},\ b=\frac{n}{q},\ c=\frac{p}{q}$ болгон m,n,p,q бүтүн (биздин учурда оң) сандары табылат.

$a=\frac{m}{q},\ b=\frac{n}{q},\ c=\frac{p}{q}$ ны барабардыктын сол бөлүгүнө коюп көрүп, төмөнкүнү алабыз:

$$\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^{a}\cdot\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^{b}\cdot\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^{c}=\left(1+\frac{\frac{n}{q}-\frac{p}{q}}{\frac{m}{q}}\right)^{\frac{m}{q}}\cdot\left(1+\frac{\frac{p}{q}-\frac{m}{q}}{\frac{n}{q}}\right)^{\frac{n}{q}}\cdot\left(1+\frac{\frac{m}{q}-\frac{n}{q}}{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p}{q}}=$$

$$=\sqrt[q]{\left(1+\frac{n-p}{m}\right)^{m}\cdot\left(1+\frac{p-m}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{m-n}{p}\right)^{p}}.$$

Шарт боюнча ($a,b,c-$ үч бурчтуктун жактарынын узундуктары)

$a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b$ барабардыктары аткарылса, анда
$m+n>p,\ n+p>m,\ p+m>n.$

Жогоруда далилденген $m,n,p,$ натуралдык сандары үчүн $m+n>p,\ n+p>m,\ p+m>n$ болгондо, төмөнкү барабардык аткарылат:

$$\left(1+\frac{n-p}{m}\right)^{m}\cdot\left(1+\frac{p-m}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{m-n}{p}\right)^{p}\le 1.$$

Бирок

$$\left(1+\frac{n-p}{m}\right)^{m}\cdot\left(1+\frac{p-m}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{m-n}{p}\right)^{p}\le 1\Leftrightarrow\sqrt[q]{\left(1+\frac{n-p}{m}\right)^{m}\cdot\left(1+\frac{p-m}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{m-n}{p}\right)^{p}}\le 1.$$

Демек, $\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^{a}\cdot\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^{b}\cdot\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^{c}\le 1.$

Решения задач областного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике для вывешивания на стенде.

II тур

Задача 1.

Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases}(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x+t)=4,\\(y+x)\cdot(y+z)\cdot(y+t)=0,\\(z+x)\cdot(z+y)\cdot(z+t)=3.\end{cases}$$

Решение

1) Из первого уравнения системы следует, что $y+x\neq 0,$ из третьего уравнения следует, что $y+z\neq 0.$ Значит, $y+t=0,$ $t=-y.$

Система примет вид

$$\begin{cases}(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4,\\t=-y,\\(z+x)\cdot(z+y)\cdot(z-y)=3.\end{cases}$$

2) Решим в целых числах уравнение $(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4.$

Т.к. числа 3 и 4 взаимно простые, а $(x+z)$ их общий делитель, то $x+z=1$ или $x+z=-1.$

Рассмотрим случай

$$\begin{cases}(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4,\\x+z=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)\cdot(x-y)=4,\\x+z=1.\end{cases}$$

Решим в целых числах уравнение

$$(x+y)\cdot(x-y)=4.$$

Числа $(x+y)$ и $(x-y)$ одинаковой чётности. А поскольку их произведение равно 4, то оба эти числа чётные. Значит, достаточно рассмотреть случаи $x+y=\pm 2,$ $x-y=\pm 2.$

$$a)\ \begin{cases}x+y=2,\\x-y=2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=4,\\x-y=2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2,\\y=0.\end{cases}$$

В этом случае $z=-1.$

б) $\begin{cases} x+y=-2, \\ x-y=-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-4, \\ x-y=-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ y=0. \end{cases}$

В этом случае $z=3$.

Рассмотрим случай

$$\begin{cases} (x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4, \\ x+z=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\cdot(x-y)=-4, \\ x+z=-1. \end{cases}$$

Решим в целых числах уравнение
$(x+y)\cdot(x-y)=-4.$

Числа $(x+y)$ и $(x-y)$ одинаковой чётности. А поскольку их произведение равно – 4, то оба эти числа чётные. Значит, достаточно рассмотреть случаи $x+y=\pm 2,\ x-y=\mp 2$.

в) $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0, \\ x-y=-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=2. \end{cases}$

В этом случае $z=-1$.

г) $\begin{cases} x+y=-2, \\ x-y=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0, \\ x-y=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=-2. \end{cases}$

В этом случае $z=-1$.

3) Подставим найденные значения z и y в уравнения
$(z+y)\cdot(z-y)=3$ или $(z+y)\cdot(z-y)=-3$

соответственно.

а) При $z=-1,\ y=0$ уравнение $(z+y)\cdot(z-y)=3,$ обращается в ложное равенство.

б) Подставив значения $z=3,\ y=0$ в уравнение $(z+y)\cdot(z-y)=3,$ получим ложное равенство.

в) Подставив значения $z=-1,\ y=2$ в уравнение $(z+y)\cdot(z-y)=-3,$ получим верное равенство.

г) Подставив значения $z=-1,\ y=-2$ в уравнение $(z+y)\cdot(z-y)=-3,$ получим верное равенство.

4) Т.о. система уравнений

$$\begin{cases} (x+y)\cdot(x+z)\cdot(x+t)=4, \\ (y+x)\cdot(y+z)\cdot(y+t)=0, \\ (z+x)\cdot(z+y)\cdot(z+t)=3 \end{cases}$$

имеет в целых числах два решения:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=2, \\ z=-1, \\ t=-2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=0, \\ y=-2, \\ z=-1, \\ t=2. \end{cases}$$

Ответ: $(0,2,-1,-2)$; $(0,-2,-1,2)$

или

1) Из первого уравнения системы следует, что $y+x\neq 0,$ из третьего уравнения следует, что $y+z\neq 0.$ Значит, $y+t=0,$ $t=-y.$

Система примет вид

$$\begin{cases} (x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4, \\ t=-y, \\ (z+x)\cdot(z+y)\cdot(z-y)=3. \end{cases}$$

2) Решим в целых числах уравнение $(z+x)\cdot(x+y)\cdot(z-y)=3.$

Т.к. числа 3 и 4 взаимно просты, а $(x+z)$ их общий делитель, то $x+z=1$ или $x+z=-1$.

Рассмотрим случай

$$\begin{cases} x+z=1, \\ (z+x)\cdot(z+y)\cdot(z-y)=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=1, \\ (z+y)\cdot(z-y)=3. \end{cases}$$

Решим в целых числах уравнение $(z+y)\cdot(z-y)=3.$

$$a)\begin{cases} z+y=3, \\ z-y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=4, \\ z-y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2, \\ y=1. \end{cases}$$

В этом случае $x=-1.$

$$б)\begin{cases} z+y=1, \\ z-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=4, \\ z-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2, \\ y=-1. \end{cases}$$

В этом случае $x=-1.$

$$в)\begin{cases} z+y=-3, \\ z-y=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=-4, \\ z-y=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2, \\ y=-1. \end{cases}$$

В этом случае $x=3.$

$$г)\begin{cases} z+y=-1, \\ z-y=-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=-4, \\ z-y=-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2, \\ y=1. \end{cases}$$

В этом случае $x=3.$

Рассмотрим случай
$$\begin{cases} x+z=-1, \\ (z+x)\cdot(z+y)\cdot(z-y)=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=-1, \\ (z+y)\cdot(z-y)=-3. \end{cases}$$

Решим в целых числах уравнение $(z+y)\cdot(z-y)=-3$.

$$д)\begin{cases} z+y=-3, \\ z-y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=-2, \\ z-y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-1, \\ y=-2. \end{cases}$$

В этом случае $x=0$.

$$е)\begin{cases} z+y=1, \\ z-y=-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=-2, \\ z-y=-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-1, \\ y=2. \end{cases}$$

В этом случае $x=0$.

$$ж)\begin{cases} z+y=3, \\ z-y=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=2, \\ z-y=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1, \\ y=2. \end{cases}$$

В этом случае $x=0$.

$$з)\begin{cases} z+y=-1, \\ z-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z=2, \\ z-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1, \\ y=-2. \end{cases}$$

В этом случае $x=-2$.

3) а) Подставив значения $x=-1,\ y=1$ в уравнение $(x+y)\cdot(x-y)=4,$ получим ложное равенство.

б) Подставив значения $x=-1,\ y=-1$ в уравнение $(x+y)\cdot(x-y)=4,$ получим ложное равенство.

в) Подставив значения $x=3,\ y=-1$ в уравнение $(x+y)\cdot(x-y)=4,$ получим ложное равенство.

г) Подставив значения $x=3,\ y=1$ в уравнение $(x+y)\cdot(x-y)=4,$ получим ложное равенство.

д) Подставив значения $x=0,\ y=-2,$ в уравнение $(x+y)\cdot(x-y)=-4,$ получис верное равенство.

е) Подставив значения $x=0,\ y=2$ в уравнение $(x+y)\cdot(x-y)=-4,$ получим верное равенство.

ж) Подставив значения $x=-2,\ y=2,$ в уравнение $(x+y)\cdot(x-y)=-4,$ получим ложное равенство.

з) Подставив значения $x=-2,\ y=-2$ в уравнение $(x+y)\cdot(x-y)=-4,$ получим ложное равенство.

4) Т.о. система уравнений

$$\begin{cases}(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x+t)=4,\\(y+x)\cdot(y+z)\cdot(y+t)=0,\\(z+x)\cdot(z+y)\cdot(z+t)=3.\end{cases}$$

Имеет в целых числах два решения:

$$\begin{cases}x=0,\\y=2,\\z=-1,\\t=-2\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x=0,\\y=-2,\\z=-1,\\t=2.\end{cases}$$

Ответ: $(0,2,-1,-2)$; $(0,-2,-1,2)$.

или

1) Из первого уравнения системы следует, что $y+x\neq 0,$ из третьего уравнения следует, что $y+x\neq 0,$ Значит, $y+t=0,$ $t=-y.$

Система примет вид

$$\begin{cases}(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4,\\t=-y,\\(z+x)\cdot(z+y)\cdot(z-y)=3.\end{cases}$$

2) Решая уравнение

$(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4$ или $(z+x)\cdot(z+y)\cdot(z-y)=3$

в целых числах, рассмотреть все возможные представления числа 3 или 4 в виде произведения трёх целых чисел. Например,

$$3=1\cdot1\cdot3=1\cdot3\cdot1=3\cdot1\cdot1=(-1)\cdot(-1)\cdot3=(-1)\cdot1\cdot(-3)=1\cdot(-1)\cdot(-3)=(-1)\cdot(-3)\cdot1=(-1)\cdot3\cdot(-1)=$$
$$=1\cdot(-3)\cdot(-1)=(-3)\cdot(-1)\cdot1=(-3)\cdot1\cdot(-1)=3\cdot(-1)\cdot(-1).$$

И решить системы уравнений:

1) $\begin{cases}z+x=1,\\z+y=1,\\\mathrm{z-y}=3;\end{cases}$

2) $\begin{cases}z+x=1,\\z+y=3,\\\mathrm{z-y}=1;\end{cases}$

3) $\begin{cases} z+x=3, \\ z+y=1, \\ \text{z}-\text{y}=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} z+x=-1, \\ z+y=-1, \\ \text{z}-\text{y}=3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} z+x=-1, \\ z+y=1, \\ \text{z}-\text{y}=-3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} z+x=1, \\ z+y=-1, \\ \text{z}-\text{y}=-3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} z+x=-1, \\ z+y=-3, \\ \text{z}-\text{y}=1; \end{cases}$

8) $\begin{cases} z+x=-1, \\ z+y=3, \\ \text{z}-\text{y}=-1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} z+x=1, \\ z+y=-3, \\ \text{z}-\text{y}=-1; \end{cases}$

10) $\begin{cases} z+x=-3, \\ z+y=-1, \\ \text{z}-\text{y}=1; \end{cases}$

11) $\begin{cases} z+x=-3, \\ z+y=1, \\ \text{z}-\text{y}=-1; \end{cases}$

12) $\begin{cases} z+x=3, \\ z+y=-1, \\ \text{z}-\text{y}=-1. \end{cases}$

3) Выполнить подстановку найденных значений в уравнение $(x+y)\cdot(x+z)\cdot(x-y)=4.$

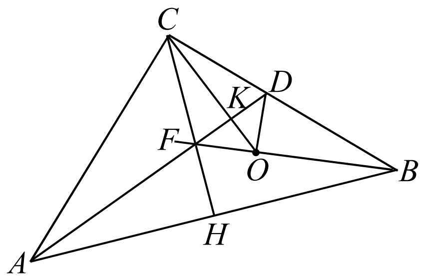
4) Найти четвёрки целых чисел, являющиеся решением исходной системы. Записать ответ.

Задача 2.

В равнобедренном прямоугольном треугольнике *ABC* с гипотенузой *AB* проведены биссектрисы *CH* и *AD*. *O* – центр окружности, вписанной в треугольник *CHB*.

Найдите величину угла *ADO*.

Решение



Т.к. *ABC* – равнобедренный прямоугольный треугольник и *CH* – биссектриса, проведённая к гипотенузе, то $\angle ACF = \angle ACH = \angle DBA = \angle CBA = 45°$.

F - точка пересечения биссектрис треугольника *ABC*.

$\angle CAF = \angle DAB,\ \angle ACH = \angle HCB.$

$\angle CFD -$ внешний угол треугольника ACF. По теореме о величине внешнего угла треугольника $\angle CFD = \angle CAF + \angle ACF.$

$\angle CDA -$ внешний угол треугольника ADB. По теореме о величине внешнего угла треугольника $\angle CDA = \angle DAB + \angle DBA.$

Значит, $\angle CDF = \angle CDA = \angle CFD.$

По признаку равнобедренного треугольника в треугольнике *FCD* $FC = CD.$

Центр окружности, вписанной в треугольник *CHB*, является точкой пересечения биссектрис этого треугольника.

Пусть биссектриса *CO* угла *C* пересекает отрезок *FD* в точке *K*, тогда *CK* – биссектриса угла *FCD* равнобедренного треугольника *FCD*. По свойству биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию, она является также медианой и высотой. Т.о. точка *K* – середина отрезка *FD* и $CO \perp FD.$

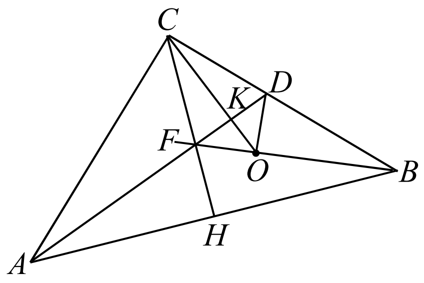
В треугольнике *FOD* *OK* является медианой и высотой, значит *FO*=*OD* и $\angle FDO = \angle DFO.$

$\angle DFB -$ внешний угол треугольника AFB. Значит, $\angle DFB = \angle FAB + \angle FBA = 45°.$

Т.о. $\angle ADO = \angle FDO = \angle DFO = \angle DFB = 45°$.

Ответ: 45°.

или



В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC с гипотенузой AB
$\angle ACB = 90°$, $\angle CAB = \angle CBA = 45°$.

F – точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Значит BF – биссектриса угла B треугольника ABC.

$\angle FAB = \frac{1}{2}\angle CAB = \frac{1}{2}\cdot 45°$;

$\angle FBH = \frac{1}{2}\angle CBA = \frac{1}{2}\cdot 45°$.

O – центр окружности, вписанной в треугольник HBC – точка пересечения биссектрис треугольника HBC. CO – биссектриса угла HCB треугольника HBC.

$\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCH = \frac{1}{2}\cdot 45°$.

$\angle DFO$ – внешний угол треугольника AFB. По теореме о величине внешнего угла треугольника $\angle DFO = \angle FAB + \angle FBA = 45°$.

Аналогично внешний угол треугольника COB $\angle FOC = \angle OCB + \angle OBC = 45^0$.

Тогда $\angle FKO = 90^0$ и $CO \perp FD$.

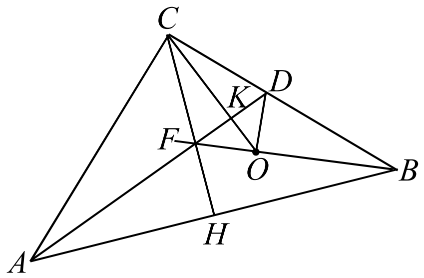
В треугольнике FCD CK – и биссектриса, и высота, а значит, и медиана.
Т.о. точка K – середина отрезка FD.

Следовательно OK – и высота, и медиана треугольника FOD. Значит треугольник FOD равнобедренный и $\angle FDO = \angle DFO = 45^0$.

$\angle ADO = \angle FDO = 45^0$.

Ответ: 45^0.

или



CHB – прямоугольный равнобедренный треугольник.

Треугольники *CHB* и *ACB* подобны.

BF и *AD* – биссектрисы острых углов, а точки *O* и *F* – точки пересечения биссектрис треугольников *CHB* и *ACB* соответственно. Откуда $\frac{OF}{FD} = \frac{CH}{CB} \Leftrightarrow \frac{OF}{CH} = \frac{FD}{CB}$.

$\angle DFO -$ внешний угол треугольника AFB. По теореме о величине внешнего угла треугольника $\angle DFO = \angle FAB + \angle FBA = 45^0$.

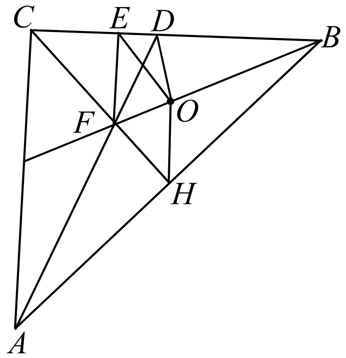
Рассмотрим треугольники *FOD* и *CHB*: $\angle DFO = \angle BCH = 45^0$, $\frac{OF}{CH} = \frac{FD}{CB}$.

Следовательно, треугольник *FOD* подобен треугольнику *CHB*, и $\angle FDO = \angle CBH = 45^0$.

$\angle ADO = \angle FDO = 45^0$.

Ответ: 45^0.

или



F – точка пересечения биссектрис треугольника *ABC*.

Центр *O* окружности, вписанной в треугольник *CHB*, – точка пересечения биссектрис треугольника *CHB*.

Биссектриса CH равнобедренного треугольника *ACB*, проведённая к его основанию, является также его высотой. Значит, $\angle CHB = 90°$

$HO -$ биссектриса $\angle CHB$.

$\angle FHO = \angle OHB = 45^0$.

Дополнительное построение: проведём $FE \perp CB$, $E \in CB$, проведём отрезок EO.

Биссектриса неразвернутого угла является его осью симметрии. Значит, треугольники *FHB* и *FEB* симметричны относительно прямой BF. Откуда следует, что $FE = FH$, $EO = OH$, $\angle EFO = \angle HFO$ и EO $-$ биссектриса угла *FEB*.

(Можно вместо свойств симметрии доказать, используя соответствующие признаки равенства треугольников равенство треугольников *FBE* и *FBH*, равенство треугольников *FEO* и *FHO*.)

Следовательно $\angle OEB = \angle FEO = \angle FHO = 45^0$.

$\angle BFD -$ внешний угол треугольника AFB. $\angle OFD = \angle BFD = \angle FAB + \angle FBA = 45^0$.

Т.о. $\angle OFD = \angle OED$, из чего следует, что O, F, E, D лежат на одной окружности.

(Действительно, если провести окружность через точки *OFD*, то угол *OFD* – вписанный, опирающийся на дугу *OD*. Если бы точка *E* лежала внутри круга, то величина угла *OED* была бы больше 45°, а если бы эта точка лежала вне круга, величина угла *OED* была бы меньше 45°. Значит, точка *E* лежит на окружности, описанной около треугольника *OFD*.)

Значит, $\angle FDO = \angle FEO$, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу *FO*.

Итак, $\angle ADO = \angle FDO = \angle FEO = 45^0$.
Ответ: 45^0.

Задача 3.

Длины сторон треугольника выражаются рациональными числами a, b и c. Докажите, что выполняется неравенство $\left(1+\dfrac{b-c}{a}\right)^a \cdot \left(1+\dfrac{c-a}{b}\right)^b \cdot \left(1+\dfrac{a-b}{c}\right)^c \le 1$

Доказательство

1) Т.к. $a, b, c -$ длины сторон треугольника, то $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Любая из сторон треугольника меньше суммы двух других его сторон, поэтому $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$.

Рассмотрим выражение $1+\dfrac{b-c}{a} = \dfrac{a+b-c}{a}$.

Преобразовав левую часть неравенства, получим выражение

$$\left(\frac{a+b-c}{a}\right)^a\cdot\left(\frac{b+c-a}{b}\right)^b\cdot\left(\frac{c+a-b}{c}\right)^c.$$

$$\frac{a+b-c}{a}>0,\ \frac{b+c-a}{b}>0,\ \frac{c+a-b}{c}>0.$$

2) Докажем неравенство в случае, если числа a, b, c натуральные.

Как известно, среднее геометрическое любых n положительных чисел не больше среднего арифметического этих чисел:

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}\le\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\Leftrightarrow x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\le\left(\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\right)^n.$$

Если числа a,b,c натуральные, то число $a+b+c$ также натуральное.

Левая часть заданного неравенства представляет собой произведение $(a+b+c)$ штук положительных множителей:

$$\left(\frac{a+b-c}{a}\right)^a\cdot\left(\frac{b+c-a}{b}\right)^b\cdot\left(\frac{c+a-b}{c}\right)^c=$$
$$=\underbrace{\frac{a+b-c}{a}\cdot\ldots\cdot\frac{a+b-c}{a}}_{a\text{ множителей}}\cdot\underbrace{\frac{b+c-a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{b+c-a}{b}}_{b\text{ множителей}}\cdot\underbrace{\frac{c+a-b}{c}\cdot\ldots\cdot\frac{c+a-b}{c}}_{c\text{ множителей}}.$$

Среднее арифметическое этих чисел равно

$$\frac{\frac{a+b-c}{a}\cdot a+\frac{b+c-a}{b}\cdot b+\frac{c+a-b}{c}\cdot c}{a+b+c}=\frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

Следовательно, $\underbrace{\frac{a+b-c}{a}\cdot\ldots\cdot\frac{a+b-c}{a}}_{a}\cdot\underbrace{\frac{b+c-a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{b+c-a}{b}}_{b}\cdot\underbrace{\frac{c+a-b}{c}\cdot\ldots\cdot\frac{c+a-b}{c}}_{c}\le 1^{a+b+c}$

и $\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a\cdot\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b\cdot\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c\le 1.$

3) Докажем неравенство в случае, когда хотя бы одно из чисел a,b,c не целое.

Любое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби. И можно привести эти дроби к общему знаменателю. Т.е. найдутся такие целые (а в нашем случае положительные) числа m,n,p,q, что $a=\frac{m}{q},\ b=\frac{n}{q},\ c=\frac{p}{q}.$

Подставив $a=\frac{m}{q},\ b=\frac{n}{q},\ c=\frac{p}{q}$ в левую часть неравенства, получим

$$\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a\cdot\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b\cdot\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c=\left(1+\frac{\frac{n}{q}-\frac{p}{q}}{\frac{m}{q}}\right)^{\frac{m}{q}}\cdot\left(1+\frac{\frac{p}{q}-\frac{m}{q}}{\frac{n}{q}}\right)^{\frac{n}{q}}\cdot\left(1+\frac{\frac{m}{q}-\frac{n}{q}}{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p}{q}}=$$

$$=\sqrt[q]{\left(1+\frac{n-p}{m}\right)^m\cdot\left(1+\frac{p-m}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{m-n}{p}\right)^p}.$$

Поскольку по условию (a,b,c – длины сторон треугольника) выполняются неравенства

$a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b,$ то $m+n>p,\ n+p>m,\ p+m>n.$

По доказанному выше для натуральных чисел $m,n,p,$ таких, что
$m+n>p,\ n+p>m,\ p+m>n,$ выполняется неравенство

$$\left(1+\frac{n-p}{m}\right)^m\cdot\left(1+\frac{p-m}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{m-n}{p}\right)^p\le 1.$$

Но $\left(1+\frac{n-p}{m}\right)^m\cdot\left(1+\frac{p-m}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{m-n}{p}\right)^p\le 1 \Leftrightarrow \sqrt[q]{\left(1+\frac{n-p}{m}\right)^m\cdot\left(1+\frac{p-m}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{m-n}{p}\right)^p}\le 1.$

Следовательно, $\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a\cdot\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b\cdot\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c\le 1.$