Математика боюнча окуучулардын Республикалык олимпиадасынын областтык этабынын тапшырмаларынын чыгарылыштары. Стендге илүү үчүн.

I тур

№1 маселе.

$x^2-(\sin 2+\sin 3)\cdot x+\sin 2\cdot\sin 3<0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Чыгарылышы:

1) Виеттин теоремасы боюнча $\sin 2$ жана $\sin 3$ сандары $y=x^2-(\sin 2+\sin 3)\cdot x+\sin 2\cdot\sin 3$ функциясынын нөлдөрү же $x^2-(\sin 2+\sin 3)\cdot x+\sin 2\cdot\sin 3=0$ теңдемесинин тамырлары болуп эсептелет.

2) $\dfrac{\pi}{2}<2<3<\pi$. $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ аралыгында $y=\sin t$ нын функциясы азаят. Демек, $\sin 3<\sin 2$.

Катышуучу $\sin 3<\sin 2$ барабарсыздыгын тригонометриялык тегеректин жардамы менен көрсөтө алат.
3) Интервалдардын ыкмасын пайдаланып, $x\in(\sin 3;\sin 2)$ же $\sin 3<x<\sin 2$ алабыз
же
1) $x^2-(\sin 2+\sin 3)\cdot x+\sin 2\cdot\sin 3<0 \Leftrightarrow x^2-\sin 2\cdot x-\sin 3\cdot x+\sin 2\cdot\sin 3<0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x^2-\sin 2\cdot x)-(\sin 3\cdot x-\sin 2\cdot\sin 3)<0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\cdot(x-\sin 2)-\sin 3\cdot(x-\sin 2)<0 \Leftrightarrow (x-\sin 2)\cdot(x-\sin 3)<0.$

2) $\dfrac{\pi}{2}<2<3<\pi$. $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$аралыгында $y=\sin t$ нын функциясы азаят. Демек, $\sin 3<\sin 2$.

Катышуучу $\sin 3<\sin 2$ барабарсыздыгын тригонометриялык тегеректин жардамы менен көрсөтө алат.
3) Интервалдардын ыкмасын пайдаланып, $x\in(\sin 3;\sin 2)$ же $\sin 3<x<\sin 2$ алабыз.

Жообу: $x\in(\sin 3;\sin 2)$ же $\sin 3<x<\sin 2$.

№2 маселе.

Ички бурчтарынын баары градустардын бүтүн саны менен туюнтулган томпок миң бурчтук болушу мүмкүнбү? Жообуңарды негиздеп бергиле.

Чыгарылышы:

Томпок n – бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы $180°\cdot(n-2)$ формуласы менен эсептелет.

Томпок миң бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы$180°\cdot 998=179640°$ ка барабар.

Эгерде ички бурч градустардын бүтүн саны менен туюнтулуш керек болсо, анда анын эң чоң чоңдугу 179°ка барабар. Демек, бардык ички бурчтары градустардын бүтүн саны менен туюнтулган томпок миң бурчтуктун бурчтарынын суммасы 179000°тан ашпайт.

Демек, маселенин шартын канааттандырган томпок миң бурчтуктун болушу мүмкүн эмес.

же

Эгерде миң бурчтуктун бардык ички бурчтарынын 179640° болгон суммасын 1000 даана бурчка тең бөлсө, анда 179,64° болот. Демек, эгерде ар бир бурчка 179°тан болсо, анда дагы 640° калат, алардан 1°тан 640 бурчка кошуп койсо болот.

Бирок анда $179°+1°=180°-$ жайылган бурч болуп калат жана мындай миң бурчтуктун болушу мүмкүн эмес.

Жооп: Жок.

№3 маселе.

$2018\cdot 2019\cdot 2020\cdot 2021+1$ санын натуралдык сандын квадраты түрүндө жазгыла.

Чыгарылышы:

Эгерде $2018\cdot 2019\cdot 2020\cdot 2021+1=n^2$ болгон n натуралдык саны бар болсо, анда

$$2018\cdot 2019\cdot 2020\cdot 2021=n^2-1,$$
$$2018\cdot 2019\cdot 2020\cdot 2021=(n-1)\cdot(n+1).$$

$2018\cdot 2019\cdot 2020\cdot 2021$ туюнтмасын өзгөртөбүз.

$$2018\cdot 2019\cdot 2020\cdot 2021=(2020-2)\cdot(2020-1)\cdot 2020\cdot(2020+1)=$$
$$=\left((2020-2)\cdot(2020+1)\right)\cdot\left((2020-1)\cdot 2020\right)=\left(2020^2-2020-2\right)\cdot\left(2020^2-2020\right)=$$
$$=\left(2020^2-2021-1\right)\cdot\left(2020^2-2021+1\right).$$

$$n=2020^2-2021=4078379.$$

$$2018\cdot 2019\cdot 2020\cdot 2021+1=4078379^2.$$

же

Маселени жалпы түрдө чыгарабыз.

Каалагандай натуралдык k сандарында $(k-1)\cdot k\cdot(k+1)\cdot(k+2)+1$ саны толук квадрат болуп эсептелерин далилдейбиз.

$$(k-1)\cdot k\cdot(k+1)\cdot(k+2)+1=\left((k-1)\cdot(k+2)\right)\cdot\left(k\cdot(k+1)\right)+1=\left(k^2+k-2\right)\cdot\left(k^2+k\right)+1=$$
$$=\left(k^2+k\right)^2-2\cdot\left(k^2+k\right)+1=\left(k^2+k-1\right)^2.$$

Төмөнкү учурга кайрылабыз:

$$2018\cdot 2019\cdot 2020\cdot 2021+1=\left(2019^2+2019-1\right)^2=4078379^2.$$

же

$$2018\cdot 2019\cdot 2020\cdot 2021+1=\left(2018\cdot 2021\right)\cdot\left(2019\cdot 2020\right)+1=4078378\cdot 4078380+1=$$
$$=\left(4078379-1\right)\cdot\left(4078379+1\right)+1=4078379^2-1^2+1=4078379^2.$$

же

Берилген сандык туюнтманын маанисин эсептеп, квадраттык тамырды чыгаруу алгоритмин колдонобуз.

$$2018\cdot 2019\cdot 2020\cdot 2021+1=4078379^2.$$

Жообу: 4078379^2

№4 маселе.

Теңдемени чыгаргыла:

$$\left(x^2+x\right)+\left(x^2+2x+1\right)+\left(x^2+3x+3\right)+\left(x^2+4x+5\right)+...+\left(x^2+19x+35\right)=533.$$

Чыгарылышы:

x шартында болгон коэфициенттер 1, 2, 3, 4, ... 19 сандарынын ырааттуулугун түзөт.

Демек, теңдеменин сол жагындагы кашаанын ичинде болгону 19 кошулуучу бар.

Кашааларды ачып, теңдеменин сол жагындагы окшош теңдемелерди чыгаргандан кийин төмөнкүнү алабыз:

$$19x^2+\left(1+2+3+4+...+19\right)x+\left(\underbrace{1+3+5+...+35}_{\text{18 кошулуучу}}\right).$$

$S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ арифметикалык прогрессиясынын биринчи n мүчөлөрүнүн суммасынын формуласы боюнча $\left(\text{же } S_n=\dfrac{2a_1+d\cdot\left(n-1\right)}{2}\cdot n\right)$ эсептейбиз:

$$1+2+3+4+...+19=\frac{1+19}{2}\cdot 19=190;$$
$$1+3+5+...+35=\frac{1+35}{2}\cdot 18=324.$$

Теңдеме төмөнкү түргө келет: $19x^2+190x+324=533.$

$$19x^2+190x+324=533\Leftrightarrow 19x^2+190x-209=0\Leftrightarrow x^2+10x-11=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-11\end{array}\right.$$

(Теңдеменин тамырларын квадраттык теңдеменин тамырларынын формуласы боюнча же Виеттин теоремасын пайдаланып тапса болот).

Жообу: $\{-11;1\}$.

№5 маселе.

$ABCD$ томпок төрт бурчтугунун D чокусу A, B жана C чекиттеринен өткөн айлананын борбору болуп эсептелет. ABC бурчунун чоңдугу $115°$ка барабар. ADC бурчунун чоңдугун тапкыла.

Берилди:

$ABCD$ – томпок төрт буртчугу

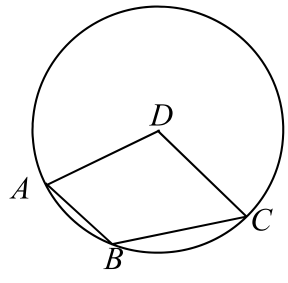
$A \in$ айлана (D, R)

$B \in$ айлана (D, R)

$C \in$ айлана (D, R)

$\angle ABC = 115°$

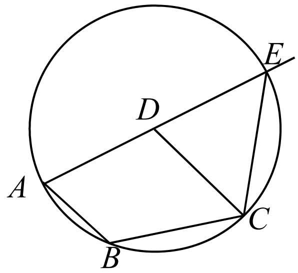
$\angle ADC$ тапкыла



Чыгарылышы:

Борбору D чекити болгон $R = AD$ радиусунун айланасын чиебиз.

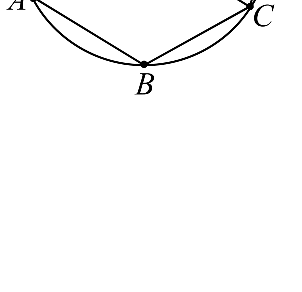
AD түз сызыгын бул айлана менен E чекитинде кесилишкенге чейин чийип барабыз.



AE кесиндиси айлананын диаметри болуп калат. Анда $AECB$ – бул айлананын ичинен сызылган төрт бурчтук. Ичтен сызылган төрт бурчтуктун касиети боюнча
$\angle ABC + \angle AEC = 180° \Leftrightarrow \angle AEC = 180° - \angle ABC = 180° - 115° = 65°$.

Бирок $\angle AEC - (D, R)$ айланасынын ичинен сызылган, ошондуктан ага дал келген борбордук $\angle ADC = 2 \cdot \angle AEC = 2 \cdot 65° = 130°$.

же

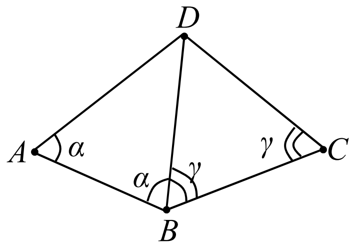


Борбору D чекити болгон радиусу $R = AD$ айланасын чиебиз. $F \in$ айлана$\left(D, R\right)$ чекитин белгилейбиз. Бул айлананын ичинен сызылган $AFCB$ төрт бурчтугун алдык.

Ичтен сызылган төрт бурчтуктун касиети боюнча
$\angle ABC + \angle AFC = 180° \Leftrightarrow \angle AFC = 180° - \angle ABC = 180° - 115° = 65°.$ Бир эле жаага таянган $\angle AFC -$ ичтен сызылган, $\angle ADC -$ борбордук.

$\angle ADC = 2 \cdot \angle AFC = 2 \cdot 65° = 130°$

же



DB кесиндисин чийип, $\triangle ADB\left(AD = DB\right)$ жана $\triangle BDC\left(DB = DC\right)$ тең капталдуу эки үч бурчтукту алабыз.

Анда тең капталдуу үч бурчтуктун касиети боюнча

$\angle DAB = \angle ABD = \alpha$

$\angle DBC = \angle DCB = \gamma$ болсун.

Бирок $\angle ABD + \angle DBC = \angle ABC = 115°,$ анда $ABCD$ төрт бурчтугунда

$\angle ADC = 360° - \left(\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD\right) = 360° - \left(\alpha + 115° + \gamma\right) = 360° - \left(115° + 115°\right) =$
$= 360° - 230° = 130°$

Жообу: 130°

№6 маселе.

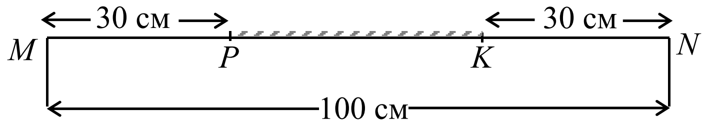
Узундугу 1 метр болгон зымды эки бөлүккө бөлүштү. Зымдын бир бөлүгүнүн узундугу 70 сантиметрден кыска эмес болуп калышынын ыктымалдуулугу кандай?

Чыгарылышы:
Ыктымалдуулуктун геометриялык аныктамасына ылайык A окуясынын ыктымалдуулугу $P\left(A\right) = \frac{g}{G},$ мында:

$G -$ бардык мүмкүн болгон натыйжалардын жалпы санын туюнткан геометриялык чен, ал эми $g - A$ окуясынын болушуна өбөлгө түзгөн натыйжалардын санын туюнткан геометриялык чен.
Геометриялык чен катары узундукту карап чыгабыз.

Натыйжалардын жалпы санына бүтүн зымдын узундугу дал келет: $G = 1\text{м} = 100\,\text{см}.$

Эгерде зымды бир жагынан 30 см-ден узун эмес аралык кылып бөлсө, анда узунураак бөлүгүнүн узундугу 70 сантиметрден кыска эмес. Ал эми зымды эки жагынан тең бөлүү мүмкүн болгондуктан, окуянын болушуна өбөлгө түзгөн кесиндилердин узундугунун суммасы $g = MP + KN = 30 + 30 = 60$(см).

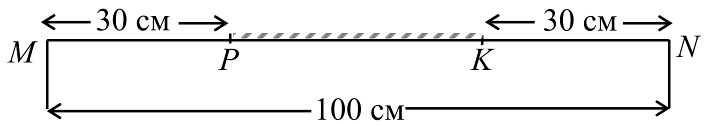


Демек, $P\left(\text{зымдын бир кесиндисинин узундугу 70 см-ден кыска эмес}\right) = \dfrac{60\text{см}}{100\text{см}} = 0,6.$

Же бөлүгүнүн

Натыйжалардын жалпы санына бүтүн зымдын узундугу дал келет: 100 см.

Зымдын эки бөлүгүнүн тең узундуктары 70см-ден кыска болуш үчүн, зым PK кесиндисинин каалагандай ички чекитинин биринен бөлүнүш керек.



PK кесиндисинин узундугу (40 см) бул окуялардын болушуна өбөлгө түзөт.

P (зымдын эки кесиндисинин тең узундугу 70 см-ден кыска) $= \dfrac{40\text{см}}{100\text{см}} = 0,4;$

Карама-каршы окуялардын ыктымалдуулук формуласы боюнча

$P\left(\text{зымдын бир кесиндисинин узундугу 70 см-ден кыска эмес}\right) = 1 - 0,4 = 0,6.$

Жообу: 0,6.

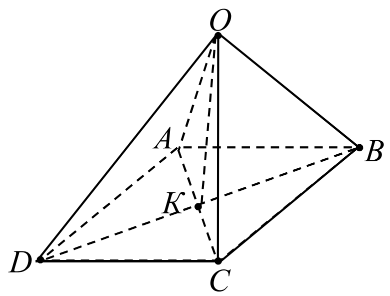
№7 маселе.

Туура төрт бурчтуу пирамиданын көлөмү 18ге барабар. Бул пирамиданын диагональ кесилиши – тик бурчтуу үч бурчтук. Пирамиданын диагональ кесилишинин аянтын тапкыла.

Берилген:

$OABCD -$ туура пирамида
$\angle DOB = 90°$
$V_{OABCD} = 18$

$S_{\triangle DOB}$ тапкыла



Чыгарылышы:

В $\triangle ODB$:

1) Аныктама боюнча $OK \perp DB$
2) Тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтуктун касиети боюнча $\angle ODB = \angle OBD = 45°$

Демек, $\triangle OKD$ $\angle DOK = 90° - \angle ODK = 90° - 45° = 45°$

Тең капталдуу үч бурчтуктун касиети боюнча $DK = OK$

Квадраттын касиети боюнча $ABCD$ $DK = KB$. $DB = 2OK$ алабыз.

$$\triangle DBC\ DC = DB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot OK \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot OK$$

$$S_{ABCD} = DC^2 = 2 \cdot OK^2$$

$$V_{OABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot OK^2 \cdot OK = \frac{2}{3} OK^3$$

Маселенин шарты боюнча $V_{OABCD} = 18$ болгондуктан,

$\frac{2}{3} OK^3 = 18 \Leftrightarrow OK^3 = 27$ теңдемесин түзөбүз.

Демек, $OK = 3$

$DB = 2 \cdot 3 = 6$

$$S_{\triangle DOB} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

Жообу: 9

Решения задач областного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике для вывешивания на стенде.

I тур

Задача №1

Решите неравенство $x^2-(\sin 2+\sin 3)\cdot x+\sin 2\cdot\sin 3<0.$

Решение

1) По теореме Виета нулями функции $y=x^2-(\sin 2+\sin 3)\cdot x+\sin 2\cdot\sin 3$ или корнями уравнения $x^2-(\sin 2+\sin 3)\cdot x+\sin 2\cdot\sin 3=0$ являются числа $\sin 2$ и $\sin 3$.

2) $\frac{\pi}{2}<2<3<\pi.$ На промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ функция $y=\sin t$ убывает. Значит, $\sin 3<\sin 2.$

Участник может проиллюстрировать неравенство $\sin 3<\sin 2,$ с помощью тригонометрического круга.
3) Применив метод интервалов, получим $x\in(\sin 3;\sin 2)$ или $\sin 3<x<\sin 2.$

или

1) $x^2-(\sin 2+\sin 3)\cdot x+\sin 2\cdot\sin 3<0\Leftrightarrow x^2-\sin 2\cdot x-\sin 3\cdot x+\sin 2\cdot\sin 3<0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(x^2-\sin 2\cdot x\right)-(\sin 3\cdot x-\sin 2\cdot\sin 3)<0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\cdot(x-\sin 2)-\sin 3\cdot(x-\sin 2)<0\Leftrightarrow(x-\sin 2)\cdot(x-\sin 3)<0.$

2) $\frac{\pi}{2}<2<3<\pi.$ На промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ функция $y=\sin t$ убывает. Значит, $\sin 3<\sin 2.$

Участник может проиллюстрировать неравенство $\sin 3<\sin 2,$ с помощью тригонометрического круга.
3) Применив метод интервалов, получим $x\in(\sin 3;\sin 2)$ или $\sin 3<x<\sin 2.$

Ответ: $x\in(\sin 3;\sin 2)$ или $\sin 3<x<\sin 2.$

Задача №2

Существует ли выпуклый тысячеугольник, все внутренние углы которого выражаются целым числом градусов? Ответ обоснуйте.

Решение

Сумма внутренних углов выпуклого n – угольника вычисляется по формуле $180°\cdot(n-2).$

Сумма внутренних углов выпуклого тысячеугольника равна $180°\cdot 998=179640°.$

Если внутренний угол должен выражаться целым числом градусов, то наибольшая его величина равна 179°. Значит, сумма углов выпуклого тысячеугольника, все внутренние углы которого выражаются целым числом градусов, не превосходит 179000°.

Т.о. выпуклого тысячеугольника, удовлетворяющего условию, не существует.

или

Если сумму всех внутренних углов тысячеугольника 179640° разделить на 1000 штук углов поровну, то получится 179,64°. Значит если по 179° на каждый угол, то останется ещё 640°, из которых можно было бы добавить по 1° к 640 углам.

Но тогда $179° + 1° = 180°$ – развёрнутый угол и такого тысячеугольника не существует.

Ответ: Нет.

Задача №3

Представьте число $2018 \cdot 2019 \cdot 2020 \cdot 2021 + 1$ в виде квадрата натурального числа.

Решение

Пусть существует натуральное число n такое, что $2018 \cdot 2019 \cdot 2020 \cdot 2021 + 1 = n^2$, тогда
$2018 \cdot 2019 \cdot 2020 \cdot 2021 = n^2 - 1,$
$2018 \cdot 2019 \cdot 2020 \cdot 2021 = (n-1) \cdot (n+1).$

Преобразуем выражение $2018 \cdot 2019 \cdot 2020 \cdot 2021.$

$$2018 \cdot 2019 \cdot 2020 \cdot 2021 = (2020-2) \cdot (2020-1) \cdot 2020 \cdot (2020+1) =$$
$$= \left((2020-2) \cdot (2020+1)\right) \cdot \left((2020-1) \cdot 2020\right) = \left(2020^2 - 2020 - 2\right) \cdot \left(2020^2 - 2020\right) =$$
$$= \left(2020^2 - 2021 - 1\right) \cdot \left(2020^2 - 2021 + 1\right).$$

$n = 2020^2 - 2021 = 4078379.$

$2018 \cdot 2019 \cdot 2020 \cdot 2021 + 1 = 4078379^2.$

или

Решим задачу в общем виде.

Докажем, что при любых натуральных k число $(k-1) \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2) + 1$ является полным квадратом.

$$(k-1) \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2) + 1 = \left((k-1) \cdot (k+2)\right) \cdot \left(k \cdot (k+1)\right) + 1 = \left(k^2 + k - 2\right) \cdot \left(k^2 + k\right) + 1 =$$
$$= \left(k^2 + k\right)^2 - 2 \cdot \left(k^2 + k\right) + 1 = \left(k^2 + k - 1\right)^2.$$

Вернёмся к частному случаю: $2018 \cdot 2019 \cdot 2020 \cdot 2021 + 1 = \left(2019^2 + 2019 - 1\right)^2 = 4078379^2.$

или

$$2018\cdot 2019\cdot 2020\cdot 2021+1=\left(2018\cdot 2021\right)\cdot\left(2019\cdot 2020\right)+1=4078378\cdot 4078380+1=$$
$$=\left(4078379-1\right)\cdot\left(4078379+1\right)+1=4078379^2-1^2+1=4078379^2.$$

или

Вычислить значение данного числового выражения и воспользоваться алгоритмом извлечения квадратного корня.

$$2018\cdot 2019\cdot 2020\cdot 2021+1=4078379^2.$$

Ответ: 4078379^2

Задача №4

Решите уравнение

$$\left(x^2+x\right)+\left(x^2+2x+1\right)+\left(x^2+3x+3\right)+\left(x^2+4x+5\right)+...+\left(x^2+19x+35\right)=533.$$

Решение

Коэффициенты при x образуют последовательность чисел 1, 2, 3, 4, ... 19. Следовательно, в левой части уравнения всего 19 слагаемых, заключенных в скобки.

Раскрыв скобки и приведя подобные в левой части уравнения, получим:

$$19x^2+\left(1+2+3+4+...+19\right)x+\left(\underbrace{1+3+5+...+35}_{\text{18 слагаемых}}\right).$$

По формуле суммы первых n членов арифметической прогрессии $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ $\left(\text{или } S_n=\frac{2a_1+d\cdot(n-1)}{2}\cdot n\right)$ вычислим

$$1+2+3+4+...+19=\frac{1+19}{2}\cdot 19=190;$$
$$1+3+5+...+35=\frac{1+35}{2}\cdot 18=324.$$

Уравнение примет вид $19x^2+190x+324=533$.

$$19x^2+190x+324=533\Leftrightarrow 19x^2+190x-209=0\Leftrightarrow x^2+10x-11=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-11\end{array}\right.$$

(Корни уравнения можно найти по формуле корней квадратного уравнения, либо используя теорему Виета).

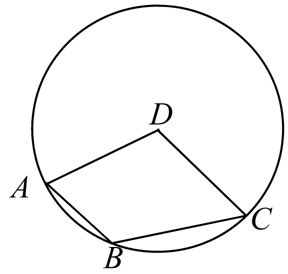
Ответ: $\{-11;1\}$.

Задача 5.

Вершина D выпуклого четырёхугольника $ABCD$ является центром окружности, проходящей через точки A, B и C. Величина угла ABC равна 115°. Найдите величину угла ADC.

Дано:

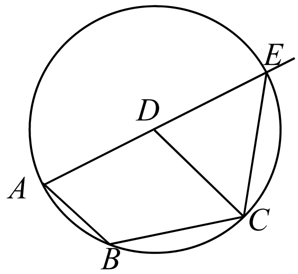
$ABCD$ – выпуклый четырёхугольник
$A \in \text{окр}(D, R)$
$B \in \text{окр}(D, R)$
$C \in \text{окр}(D, R)$
$\angle ABC = 115°$
Найти $\angle ADC$



Решение

Начертим окружность радиуса $R = AD$ с центром в точке D.

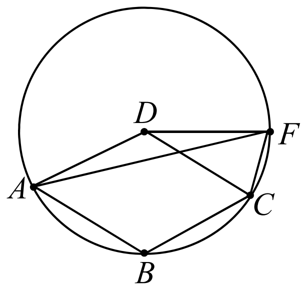
Проведём прямую AD до пересечения с этой окружностью в точке E.



Получим, что отрезок AE – диаметр окружности. Тогда $AECB$ – четырёхугольник, вписанный в эту окружность. По свойству вписанного четырёхугольника $\angle ABC + \angle AEC = 180° \Leftrightarrow \angle AEC = 180° - \angle ABC = 180° - 115° = 65°.$ Но $\angle AEC$ – вписанный, в окр$(D, R),$ поэтому ему соответствующий центральный

$\angle ADC = 2 \cdot \angle AEC = 2 \cdot 65° = 130°.$

или

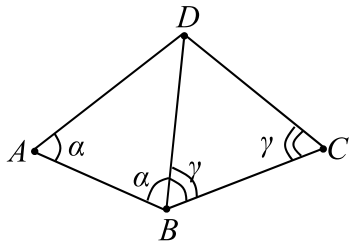


Начертим окружность радиуса $R = AD$ с центром в точке $D.$ Отметим точку $F \in \text{окр}(D, R).$ Получили $AFCB$ – вписанный в эту окружность четырёхугольник. По свойству вписанного четырёхугольника

$\angle ABC + \angle AFC = 180° \Leftrightarrow \angle AFC = 180° - \angle ABC = 180° - 115° = 65°.$ $\angle AFC$ – вписанный, $\angle ADC$ – центральный, опирающиеся на одну и ту же дугу.

$\angle ADC = 2 \cdot \angle AFC = 2 \cdot 65° = 130°$

или



Проведём отрезок $DB,$ получим два равнобедренных треугольника $\triangle ADB\left(AD = DB\right)$ и $\triangle BDC\left(DB = DC\right)$

Тогда по свойству равнобедренного треугольника пусть

$\angle DAB = \angle ABD = \alpha$

$\angle DBC = \angle DCB = \gamma$

Но $\angle ABD + \angle DBC = \angle ABC = 115°,$ тогда в четырёхугольник $ABCD$

$$\angle ADC = 360° - \left(\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD\right) = 360° - \left(\alpha + 115° + \gamma\right) = 360° - \left(115° + 115°\right) =$$
$$= 360° - 230° = 130°$$

Ответ: 130°

Задача №6

Проволоку длиной 1 метр разрезали на две части. Какова вероятность того, что длина одного из отрезков проволоки не менее 70 сантиметров?

Решение

Согласно геометрическому определению вероятности вероятность события A $P\left(A\right) = \dfrac{g}{G},$

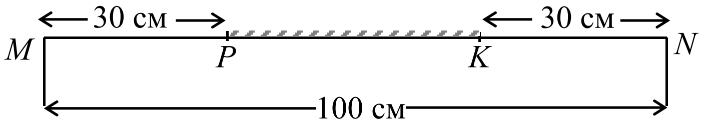
где $G-$ геометрическая мера, выражающая общее число всех возможных исходов,

$g-$ геометрическая мера, выражающая количество исходов, благоприятствующих событию $A.$

В качестве геометрической меры рассмотрим длину.

Общему числу исходов соответствует длина всей проволоки: $G = 1\text{м} = 100\,\text{см}.$

Длина большего куска не менее 70 сантиметров, если разрез произведён на расстоянии не более 30 см от конца проволоки. А т.к. разрез можно сделать с обоих концов проволоки, то суммарная длина отрезков, соответствующих благоприятствующим событиям, $g = MP + KN = 30 + 30 = 60(\text{см}).$

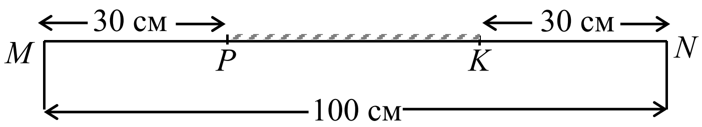


Т.о. $P\left(\text{Длина одного из отрезков проволоки не менее 70 см}\right)=\dfrac{60\text{см}}{100\text{см}}=0,6.$

или

Общему числу исходов соответствует длина всей проволоки: 100 см.

Чтобы длина обоих кусков проволоки была меньше 70 см, разрез должен быть сделан в любой внутренней точке отрезка *PK*.



Событиям, благоприятствующим этому, соответствует длина отрезка *PK*: 40 см.

$P\left(\text{Длина обоих кусков проволоки меньше 70 см}\right)=\dfrac{40\text{см}}{100\text{см}}=0,4;$

По формуле вероятности противоположных событий

$P\left(\text{Длина одного из отрезков проволоки не менее 70 см}\right)=1-0,4=0,6.$

Ответ: 0,6.

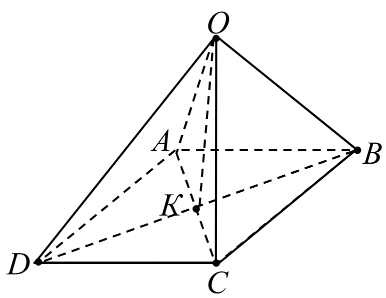
Задача №7

Объём правильной четырёхугольной пирамиды равен 18. Диагональное сечение этой пирамиды – прямоугольный треугольник. Найдите площадь диагонального сечения пирамиды.

Дано:

$OABCD$ – правильная пирамида
$\angle DOB = 90°$
$V_{OABCD} = 18$

Найти $S_{\triangle DOB}$



Решение

В $\triangle ODB$:

1) $OK \perp DB$ по определению

2) $\angle ODB = \angle OBD = 45°$ по свойству равнобедренного прямоугольного треугольника

Значит, в $\vartriangle OKD$ $\angle DOK = 90° - \angle ODK = 90° - 45° = 45°$

По признаку равнобедренного треугольника $DK = OK$

По свойству квадрата $ABCD$ $DK = KB$. Получим $DB = 2OK$

Из $\vartriangle DBC$ $DC = DB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot OK \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot OK$

$S_{ABCD} = DC^2 = 2 \cdot OK^2$

$V_{OABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot OK^2 \cdot OK = \frac{2}{3} OK^3$

Так как по условию $V_{OABCD} = 18,$ составим уравнение $\frac{2}{3} OK^3 = 18 \Leftrightarrow OK^3 = 27$

Значит, $OK = 3$

$DB = 2 \cdot 3 = 6$

$S_{\vartriangle DOB} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$

Ответ: 9