ОЛИМПИАДА 2019, 4-этап
математика

Экинчи күн

4-маселе

Натуралдык сандардын көптүгүндө $x^2 + 1^0 + y^1 + z^9 = 2019$ теңдемесинин чыгарылыштарын тапкыла.

4-чыгарылыш

Эгерде $z \geq 3$, анда $z^9 \geq 19683 > 2019$. Мында чыгарылыш жок.

Кийинки учурлар болушу мүмкүн: 1) $z = 1$ же 2) $z = 2$. Бул учурларды карап чыгалы.

1) $z = 1$. Анда $y = 2018 - x^2$.

Мында ар кандай маани мүмкүн $1 \leq x \leq 44$. Мындан $y = 2018 - x^2$ алабыз.

2) $z = 2$. Анда $y = 2019 - 2^9 - x^2 = 1491 - x^2$

Мында ар кандай маани мүмкүн $1 \leq x \leq 38$. Мындан $y = 2018 - x^2$ алабыз.

Жооп: Теңдеме 44 + 38 = 82 чыгарылышка ээ. Туура жооп үчүн **+1 балл**, ар түрдүү учурлардагы толук топтомду туура жаза кеткени үчүн **+3 баллга** чейин, толук негиздөө үчүн **+10 баллга** чейин. Бир канча чыгарылыш үчүн **+1 балл**.

5-маселе.

ABCD квадратынын жактарынын узундугу 18ге барабар. AKL үч бурчтугунун периметри 18 боло тургандай кылып квадраттын AB жагында K чекити, ал эми AD жагында L чекити тандалды. LM кесиндиси AB кесиндисине параллель боло тургандай кылып BC жагында M чекити тандалды. KN кесиндиси AD кесиндисине параллель боло тургандай кылып DC жагында N чекити тандалды. CNM үч бурчтугунун аянтын тапкыла.

5-чыгарылыш

Кесиндилердин узундугун белгилейли: AK = x, AL= y. Анда $KL = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

AKL үч бурчтугунун периметри $x + y + \sqrt{(x^2 + y^2)} = 18$. Бул барабардыкты квадратка көтөрөбүз $2*18^2 - 2*18x - 2*18y + 2xy = 18^2$.

ΔCNM тик бурчтуу үч бурчтуктун аянтын кийинкидей табабыз:

$S(\Delta CNM) = ½ (18 – x)(18 – y) =½(18^2 - 18x - 18y + xy) = ½ *½ *18^2 = 18^2 / 4$

Ответ: $S(\Delta CNM) = 18^2 / 4 = 81$. Жооп үчүн **+ 1 балл**, негиздөөсү менен **+ 10 баллга чейин**.

6-маселе.
Ч, Ы, Н, Б, О, Ж, Т тамгаларынын ар бирин бир жолудан колдонуп «сөз» түзүш керек. Бул сөздө төмөнкү кошуна айкаштар гана боло алат:
БО, ОБ, ОЖ, ЖО, ОН, НО, ЖТ, ТЖ, ЖЧ, ЧЖ, ЖН, НЖ, ЧТ, ТЧ, ЧН, НЧ, ЧЫ, ЫЧ, НЫ, ЫН.
Мисал катары төмөнкү «сөз» берилди: ЫЧТЖНОБ.
А) Бул тамгалар жана «сөз» эмнени билдириши мүмкүн?
Б) Канча ар башка ушундай «сөз» жашайт?

6-чыгарылыш

А) Маселенин мааниси боюнча берилген тамгалар белгиленген түрдө бири бири менен байланышкан кээ бир (жети) объектилерди билдирет. Булардын баарынан, б.а., ар биринен бир жолудан өтүш керек. Бул объектилер облустар болушу мүмкүн. Ы тамгасынын болушу – кыргыз тилиндеги сөз экендигинен кабар берет. Катышуучуга КРдагы облустардын саны белгилүү болушу керек. Жыйынтыкта: тамгалар КРдагы облустардын аталыштарынын баш тамгалары деп кабыл алынышы мүмкүн: Баткен, Жалал-Абад, Ысык-Көл, Нарын, Ош, Талас, Чүй.

Мүмкүн болгон тамгалардын жубу чектешкен облустарга туура келет. Изделип жаткан “сөздөр” кошуна облустар жана ар бир облус аркылуу бир гана жолу өтүүгө мүмкүн болгон маршрутту берет. **+1 балл**

Б) Б тамгасы О тамгасынын гана жанында тургандыктан, бардык “сөздөр” Б тамгасы менен башталат же аяктайт. Б менен башталган сөздөрдү карап чыгалы.

1. Башы: БО. Мүмкүн боло турган варианттар:
1.1. БОЖ же
1.2. БОН.

Кийинкидей улантылышы мүмкүн:

1.1.1. БОЖН же

1.1.2. БОЖТЧ. Улантабыз

1.1.1.1 БОЖНЫЧТ – бул «СӨЗ»

1.1.2.1 БОЖТЧЫН жана БОЖТЧНЫ дагы 2 «сөз»
1.2. Сөздөрдүн дагы 3 варианты: БОНЖТЧЫ, БОНЫЧТЖ, БОНЫЧЖТ.
Тескери тартипте жайгашкан Б менен бүткөн дагы 6 “сөз:
ТЧЫНЖОБ, НЫЧТЖОБ, ЫНЧТЖОБ, ЫЧТЖНОБ, ЖТЧЫНОБ, ТЖЧЫНОБ.
Бардыгы 12 «сөз».
Жооп үчүн **+ 1 балл**, негиздөө менен **+ 9 баллга чейин**.
Жыйынтыгында + 10 баллга чейин.

ОЛИМПИАДА 2019 4-й этап, математика

Второй день

Задача 4.
Найти решения уравнения $x^2 + 1^0 + y^1 + z^9 = 2019$ в натуральных числах.

Решение 4.

Если $z \geq 3$, то $z^9 \geq 19683 > 2019$. Решений при этом нет.

Возможны случаи: 1) $z = 1$ или 2) $z = 2$. Рассмотрим эти случаи.

1). $z = 1$. Тогда $y = 2018 - x^2$.

Возможно любое значение $1 \leq x \leq 44$. При этом получаем: $y = 2018 - x^2$

2). $z = 2$. Тогда $y = 2019 - 2^9 - x^2 = 1491 - x^2$

Возможно любое значение $1 \leq x \leq 38$. При этом получаем: $y = 2018 - x^2$

Ответ: Всего решений уравнение имеет $44 + 38 = 82$. За правильный ответ **+1 балл**, за правильное упоминание полного набора различных случаев до **+3 балл**, полное обоснование до **+ 10 баллов**.

За несколько решений **+ 1 балл**.

Задача 5.
У квадрата ABCD длина стороны равна 18. На стороне квадрата AB выбрана точка K, а на стороне AD – точка L так, что периметр треугольника AKL равен 18. Точка M выбрана на стороне BC так, что отрезок LM параллелен отрезку AB.
Точка N выбрана на стороне DC так, что отрезок KN параллелен отрезку AD.
Найти площадь треугольника CNM.

Решение 5.

Обозначим длины отрезков: $AK = x$, $AL = y$. Тогда $KL = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

Периметр треугольника AKL $x + y + \sqrt{(x^2 + y^2)} = 18$. Возводим в квадрат это равенство

$2*18^2 - 2*18x - 2*18y + 2xy = 18^2$.

Площадь прямоугольного треугольника ΔCNM находим в виде:

$S(\Delta CNM) = ½ (18 – x)(18 – y) = ½(18^2 - 18x - 18y + xy) = ½ * ½ * 18^2 = 18^2 / 4$

Ответ: $S(\Delta CNM) = 18^2 / 4 = 81$. За ответ **+ 1 балл**, с обоснованием до **+ 10 баллов**.

Задача 6.
В «слове» должны быть буквы Ч, Ы, Н, Б, О, Ж, Т, каждая из которых встречается по одному разу. Возможны только следующие сочетания соседних букв:
БО, ОБ, ОЖ, ЖО, ОН, НО, ЖТ, ТЖ, ЖЧ, ЧЖ, ЖН, НЖ, ЧТ, ТЧ, ЧН, НЧ, ЧЫ, ЫЧ, НЫ, ЫН.
Пример «слова»: ЫЧТЖНОБ.
А) Что могут обозначать эти буквы и «слова»?
Б) Сколько существует таких различных «слов» ?

Решение 6.
А) По смыслу задачи, данные буквы обозначают некоторые (семь) объекты, связанные между собой указанным образом, и надо пройти по всем объектам, по одному разу каждый. Такие объекты скорее всего являются областями. Наличие буквы Ы подсказывает, что это - кыргызский язык. Количество областей в КР должно быть известно участнику. Получаем: буквы могут быть поняты как заглавные в названии областей КР:
Баткенская, Жалалабадская, Ыссыкульская, Нарынская, Ошская, Таласская, Чуйская.
Возможные пары букв соответствуют областям, имеющим общую границу.
Искомые «слова» дают возможный маршрут, проходящий по соседним областям и проходящий через каждую область ровно один раз. **+ 1 Балл.**
Б) Поскольку Буква Б стоит только рядом с О, то все «слова» начинаются или заканчиваются на букву Б. Рассмотрим слова, начинающиеся на Б.
1. Начало: БО. Далее возможны варианты:
1.1. БОЖ или
1.2. БОН .
Дальше возможны продолжения:

1.1.1. БОЖН или

1.1.2. БОЖТЧ. Продолжаем

1.1.1.1 БОЖНЫЧТ - Это «СЛОВО»

1.1.2.1 БОЖТЧЫН и БОЖТЧНЫ еще 2 «слова»
1.2. Еще 3 варианта слов: БОНЖТЧЫ, БОНЫЧТЖ, БОНЫЧЖТ.
И еще 6 «слов» в обратом порядке с окончанием на Б:
ТЧЫНЖОБ, НЫЧТЖОБ, ЫНЧТЖОБ, ЫЧТЖНОБ, ЖТЧЫНОБ, ТЖЧЫНОБ.
Всего 12 «слов».
За ответ **+ 1 балл**, с обоснованием до **+ 9 баллов**.
Итого до **+ 10 баллов**.