

# ОЛИМПИАДА 2019, 4-этап

## математика

### Биринчи күн

#### 1-маселе

Төмөнкү мисалдагы көбөйтүү амалында бирдей цифралар бирдей тамгалар менен, ар башка цифралар ар башка тамгалар менен алмаштырылган:

$$C * \text{НОВЫМ} = \text{ГОДОМ}$$

А) Н тамгасынын сандык маанисин тапкыла.

Б) Ар бир тамганын сандык маанисин тапкыла.

#### 1-чыгарылыш:

**Жооп: А)  $N = 1$ . + 1 балл.**

**Кандайдыр бир негиздөө менен болсо +2 балл.**

*Мисал.*

$C > 1$  экени анык. Ошондой эле, эгерде  $C=9$  болсо, анда  $N=1$  жана  $\Gamma=9=C$ . Демек,  $1 < C < 9$ .

Андан соң  $C * M = \dots M$  кийинки учурларда гана:

1)  $M = 5$  жана  $C = 3$ ; 2)  $M = 5$  жана  $C = 7$ ; 3)  $C = 6$  жана  $M = 2$  же 4.

Кийинки кырдаалды карап чыгалы: 1). Мында  $N < 3$ . Эгерде  $N = 2$  болсо, анда  $6 \leq \Gamma < 9$ .

Эгерде  $\Gamma = 6$  болсо, анда  $O = 0$  болуп,  $3 * \text{ВЫ5} = \text{Д05}$  алабыз. Мындан  $Ы = 3 = C$  келип чыгат.

Эгерде  $\Gamma = 7$  болсо, анда  $O = 3$  же  $O = 4$  болушу мүмкүн эмес,  $\Gamma = 7$  да мүмкүн эмес. Эгерде

$\Gamma = 8$  болсо, анда  $O = 7$  мүмкүн эмес. Анда  $O = 9$ .  $3 * 29\text{ВЫ5} = 89\text{Д95}$  à  $3 * \text{ВЫ5} = 2\text{Д95}$  жана

$V = 6$  – мүмкүн эмес.

1-учурда мүмкүн эмес. Ошондуктан  $C = 6$  же  $C = 7$  болот. Анда  $N = 1$  болот.

**Жооп: Б)  $7 * 13405 = 93835$  же  $6 * 15842 = 95052$ .**

**Эки жооптун бири үчүн +1балл жана андан ары текшерилбейт.**

**Эки жооп үчүн +3 балл.**

**Негиздөө үчүн +4 баллдан + 8 баллга чейин.**

**Мисалы:**

“2-учур үчүн бир гана чыгарылыш бар  $7 * 13405 = 93835$

3-учур үчүн бир гана чыгарылыш бар  $6 * 15842 = 95052$ .”

**+ 4 балл** (учурлар гана көрсөтүлгөн).

**Жыйынтыгында +10 баллга чейин.**

## 2-маселе

Функциянын маанилери аргументтин кээ бир маанилери үчүн белгилүү болсо, анда  $(f(x) = )$  функциясын кайсы формула менен эсептесе болот? Бир же бири-бирине окшобогон эки формуланы тапкыла.  $f(-1) = 1, f(0) = 3, f(1) = 1, f(2) = 3$ .

### 2-чыгарылыш:

**Бир вариант үчүн +5 балл. Эки окшош вариант үчүн +6 балл. Эки ар башка вариант үчүн +10 балл.**

*Варианттар :*

1)  $f(x)$  функциясын 3-даражадагы көп мүчө катарында издесе болот:

$f(x) = ax^3 + vx^2 + cx + d$ . Аргументке  $x$  маанисин берүү менен система алабыз:

$$a(-1)^3 + v(-1)^2 + c(-1) + d = 1$$

$$a0^3 + v0^2 + c0 + d = 3$$

$$a1^3 + v1^2 + c1 + d = 1$$

$$a2^3 + v2^2 + c2 + d = 3$$

Функциянын маанилерин эсептеп, төмөнкүнү алабыз:

$$-a + v - c + d = 1$$

$$d = 3$$

$$a + v + c + d = 1$$

$$8a + 4v + 2c + d = 3$$

Демек,  $a = 4/3, v = -2, c = -4/3, d = 3$  болот да, кийинкини алабыз:

**Жооп: 1)**  $f(x) = 4/3x^3 - 2x^2 - 4/3x + 3$ .

2)  $f(x)$  функциясын мезгилдик функция катарында издесе болот, мисалы:

$$f(x) = a \cos bx + c.$$

**Мүмкүн боло турган жооп: 2)**  $f(x) = \cos \pi x + 2$ .

3) “Сандын бөлчөк бөлүгү” функциясынын жардамы менен 2-мезгилдүүлүктү пайдаланууга болот. Муну менен бирге жюри бул функциянын стандарттуу белгилерге ээ эместигин эске алуу менен катышуучу сунуш кылган белгиге макул болушу керек.

4)  $f(x)$  функциясын башка түрлөрдө да издесе болот, мисалы

$$f(x) = a|x| + v|x - 1| + cx + d.$$

5) Эскертүү.  $fx = \dots(x < \dots) \dots (x > \dots)$  түрүндөгү жазуу формула катары эсептелбейт. Мындай жооп үчүн **+1 балл**.

**Жыйынтыгында +10 баллга чейин.**

### 3-маселе.

А) Беш кырынын узундугу 19, 19, 10, 10, 10, алтынчы кырынын узундугу 19 же 10 болгон, бири-бирине барабар эмес мүмкүн болгон бардык тетраэдрлерди тапкыла.

Б) Жогоруда табылган бир тетраэдрдин көлөмүн тапкыла жана аны ашыгы менен бүтүн санга чейин тегеректегиле.

### 3-меселенин чыгарылышы:

**1.1.** Эгерде эки кыры 19дан, ал эми төрт кыры 10дон болсо, анда 19дан болгон кырлары жалпы чокуга ээ (же 1.2 – 19дан болгон кырлардын жалпы чокусу жок).

Мындай тетраэдр бар.

**Кырлары 19 болгон бир жалпы чокусу бар , ал эми калган кырлары 10дон.**

**1.2.** Эгерде 19дан болгон кырларынын жалпы чокусу жок болсо, анда үч бурчтуктардын төртөө тең бирдей жана жактары 19, 10, 10. Мындай тетраэдр жок, анткени  $45^\circ$ тан аз эки тар бурч жана кең бурч чокуда биригет.

**2.** Тетраэдрдеги кырлар – 19, 19, 19, 10, 10, 10.

**2.1.** Эгерде 10дон болгон 3 кыр бир чокудан чыкса, анда 19дан болгон калган үчөө пирамиданын негизин – чоң аянттагы туура үч бурчтукту түзөт. Жактары 10, 10, 19 болгон башка 3 үч бурчтук алардын суммасынан келип чыккан негиздин аянтынан аз аянтка ээ, **мындай пирамида жок.**

**2.2.** Эгерде бир чокудан чыккан бирдей кырлар жок болсо, анда бирдей узундуктагы кырлар ABCD тетраэдринде сынык боюнча жайгаша алат, мисалы:  $AB=BC=CD=10$ ,  $CA=AD=DB=16$ . **Мындай тетраэдр жок.**

**2.3.** Акыркы учур – каптал кырлары 19дан жана негизинин кырлары 10дон болгон туура пирамида. Анын көлөмү  $V = 25/3 * \sqrt{983} \approx 262$ .

**Жооп.** А) Мындай тетраэдрлер 2 – **1.1. жана 2.3.** учурлар.

Ар бир бул тетраэдрдин бар экендигин аныктоо жана аларды так сыпаттап берүү үчүн – 3 упайга чейин. **3+3**

Башка варианттардын жок экендигин далилдөө үчүн – 2 упайга чейин.

Бар болгон тетраэдрдин көлөмүн эсептөө үчүн – 2 упайга чейин.

Бардык маселенин чыгарылышы үчүн – **10** упайга чейин

# ОЛИМПИАДА 2019 4-й этап, математика

## Первый день

### Задача 1.

В примере на умножение одинаковые цифры заменены на одинаковые буквы, а разные цифры - на разные буквы:

$$С * \text{НОВЫМ} = \text{ГОДОМ}$$

А) Найти цифровое значение буквы Н.

Б) Найти цифровые значения всех букв.

### Решение 1.

**Ответ: А)  $N = 1$ . + 1 балл.**

**С каким-нибудь обоснованием + 2 балла.**

*Например.*

Очевидно,  $C > 1$ . Также, если  $C=9$ , то  $H=1$  и  $\Gamma=9=C$ . Следовательно,  $1 < C < 9$ . Далее,  $C * M = \dots$  только в следующих случаях:

1)  $M = 5$  и  $C = 3$ ; 2)  $M = 5$  и  $C = 7$ ; 3)  $C = 6$  и  $M = 2$  или 4.

Рассмотрим случай 1). Здесь  $H < 3$ . Если  $H = 2$ , то  $6 \leq \Gamma < 9$ .

Если  $\Gamma=6$ , то  $O=0$ , и получаем  $3 * \text{ВЫ5} = \text{Д05}$ . Отсюда  $Ы=3=C$ .

Если  $\Gamma=7$ , то  $O=3$  или  $O=4$  невозможно и  $\Gamma=7$  невозможно.

Если  $\Gamma=8$ , то  $O=7$  невозможно. Тогда  $O=9$ .  $3 * 29\text{ВЫ5} = 89\text{Д95}$  и  $3 * \text{ВЫ5} = 2\text{Д95}$  и  $В=6$  - невозможно.

Случай 1) невозможен. Поэтому  $C = 6$  или  $C = 7$ . Тогда  $H=1$ .

**Ответ Б)  $7 * 13405 = 93835$  или  $6 * 15842 = 95052$ .**

**За один ответ из двух +1 балл и дальше не проверяется.**

**За оба ответа +3 балла.**

**За обоснование от +4 до +8 баллов.**

*Например:*

“Для случая 2) есть единственное решение  $7 * 13405 = 93835$

Для случая 3) есть единственное решение  $6 * 15842 = 95052$ .”

+ 4 балла (только указаны случаи).

Итого до +10 баллов.

**Задача 2.**

По какой формуле может вычисляться функция ( $f(x) =$ ), если известны её значения для некоторых значений аргумента? Найти одну или две непохожие формулы.

$$f(-1) = 1, f(0) = 3, f(1) = 1, f(2) = 3.$$

**Решение 2.**

*За один вариант +5 баллов. За два похожих варианта + 6 баллов. За два различных варианта + 10 баллов.*

*Варианты :*

1) Можно искать функцию  $f(x)$  в виде многочлена 3-й степени:

$f(x) = ax^3 + vx^2 + cx + d$ . Получаем систему, придавая аргументу  $x$  значения:

$$a(-1)^3 + v(-1)^2 + c(-1) + d = 1$$

$$a0^3 + v0^2 + c0 + d = 3$$

$$a1^3 + v1^2 + c1 + d = 1$$

$$a2^3 + v2^2 + c2 + d = 3$$

Вычисляем значения функции и получаем:

$$-a + v - c + d = 1$$

$$d = 3$$

$$a + v + c + d = 1$$

$$8a + 4v + 2c + d = 3$$

Следовательно,  $a = 4/3$ ,  $v = -2$ ,  $c = -4/3$ ,  $d = 3$  и получаем:

**Ответ 1)**  $f(x) = 4/3x^3 - 2x^2 - 4/3x + 3$ .

2) Можно искать функцию  $f(x)$  в виде периодической функции, например:

$$f(x) = a \cos bx + c.$$

**Возможный ответ 2)**  $f(x) = \cos \pi x + 2$ .

3) Можно использовать 2-периодичность при помощи функции «дробная часть числа».

При этом жюри должно учесть, что стандартного обозначения эта функция не имеет, и нужно согласиться с обозначением, предложенным участником.

4) Можно искать функцию  $f(x)$  и в других видах, например

$$f(x) = a|x| + v|x - 1| + cx + d.$$

5) Примечание. Запись вида  $fx = \dots(x < \dots) \dots(x > \dots)$  формулой не является. За такой ответ +1 балл.

*Итого до + 10 баллов.*

**Задача 3.** А) Найти все возможные неравные тетраэдры с пятью ребрами длины 19, 19, 10, 10, 10, а шестым ребром 19 или 10.

Б) Найти объем одного из получившихся тетраэдров и округлить его до целого числа с избытком.

**Решение задачи 3.**

**1.1.** Если два ребра по 19, а четыре ребра по 10, то ребра по 19 могут иметь общую вершину (или **1.2** - нет общей вершины у ребер по 19.)

Такой тетраэдр существует:

**Два ребра по 19 с общей вершиной а остальные ребра по 10.**

**1.2.** Если у ребер по 19 нет общей вершины, то все четыре треугольника одинаковы и имеют стороны 19, 10, 10. Такого тетраэдра не существует, поскольку в вершине сходятся два маленьких угла, меньших  $45^\circ$ , и тупой угол.

**2.** В тетраэдре ребра 19, 19, 19, 10, 10, 10.

**2.1.** Если три ребра по 10 выходят из одной вершины, то три других по 19 образуют основание пирамиды - правильный треугольник большой площади. Три других треугольника со сторонами 10, 10, 19 в сумме имеют меньшую площадь, чем площадь основания, **такой пирамиды не существует.**

**2.2.** Если нет одинаковых ребер, выходящих из одной вершины, то в тетраэдре ABCD могут ребра одной длины располагаться по ломаным, например:  $AB=BC=CD=10$ ,  $CA=AD=ДВ=16$ . **Такой тетраэдр не существует.**

**2.3.** Последний случай – правильная пирамида с боковыми ребрами по 19 и ребрами основания по 10. Его объем  $V = 25/3 * \sqrt{983} \approx 262$ .

**Ответ.** А) Таких тетраэдров 2 – случаи **1.1.** и **2.3.**

За установление существования каждого из этих 2 тетраэдров с точным их описанием - до 3 баллов. **3 + 3.**

За доказательство не существования других вариантов – до 2 баллов.

За вычисление объема существующего тетраэдра – до 2 баллов.

Всего за решение задачи до **10** баллов.