Математика боюнча окуучулардын Республикалык олимпиадасынын облустук этабынын маселелеринин чыгарылыштары (стендге илүү үчүн).

II тур

№1 маселе.

$20x^2+21y^2=2021$ теңдемесин бүтүн сандарда чыгаргыла.

Чыгарылышы:

$$20x^2+21y^2=2021 \Leftrightarrow 20x^2+21y^2=2000+21 \Leftrightarrow$$
$$20x^2-2000=21-21y^2 \Leftrightarrow 20\cdot\left(x^2-100\right)=21\cdot\left(1-y^2\right).$$

20 жана 21 сандары өз ара жөнөкөй сандар болгондуктан, x^2-100 саны 21ге эселүү жана $21k$ түрүндө берилет. Мында $k-$бүтүн сан. Анда $20\cdot21k=21\cdot\left(1-y^2\right)$.

Ушундан улам $x^2=21k+100,\ y^2=1-20k.$

$x^2\geq0,\ y^2\geq0.$

Демек, k бүтүн саны төмөнкү барабарсыздыктар системасын канааттандырыш керек:

$$\begin{cases}21k+100\geq0,\\ 1-20k\geq0\end{cases} \Leftrightarrow -4\frac{16}{21}\leq k\leq\frac{1}{20}.$$

Бул шартты 5 бүтүн сан канааттандырат: –4; –3; –2; –1; 0.

Беш учурдун ар бирин карап чыгабыз.

$k=-4$ шартында $x^2=16,\ y^2=81.$

$k=-3,\ k=-2,\ k=-1$ шартында y бүтүн сан эмес.

$k=0$ шартында $x^2=100,\ y^2=1.$

Демек, берилген теңдемени бүтүн сандардын төмөнкү (x,y) жуптары канааттандырат:

$(4;9),(4;-9),(-4;9),(-4;-9),(10;1),(10;-1),(-10;1),(-10;-1)$

Жообу: $(4;9),(4;-9),(-4;9),(-4;-9),(10;1),(10;-1),(-10;1),(-10;-1).$

№2 маселе.

Шашка оюнунун тактасынын төмөнкү горизонталынын ар бир клеткасында бирден шашка турат. Бир жүрүштө шашкалардын каалаган жубун тандап, алардын ар бирин бир клеткага жогору жылдырса болот.

Мындай бир нече жүрүштөн кийин бардык шашкаларды бул шашка тактасынын негизги диагоналына коюу мүмкүнбү? Мүмкүн болсо, аны кантип койсо болорун көрсөткүлө.

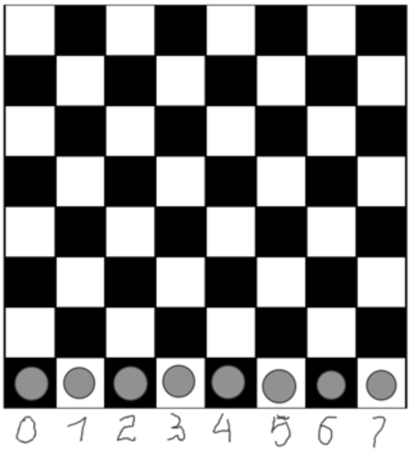
Эки шартты карап чыккыла:

а) шашка тактасынын өлчөмү 8×8 (орус шашка оюну);
б) шашка тактасынын өлчөмү 10×10 (эл аралык шашка оюну).

Чыгарылышы:

1-ыкма.

а) Өлчөмү 8×8 шашка тактасын карап чыгалы:

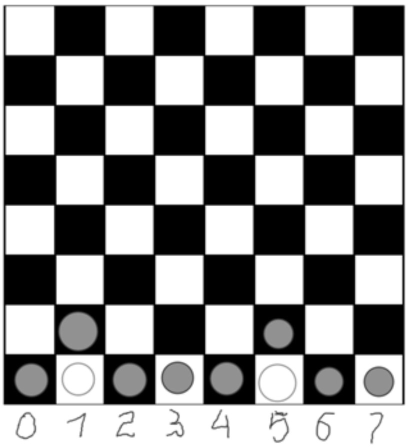


Ар бир шашканын алдында аны негизги диагоналга коюу үчүн канча кадам жасоо керектиги жазылып турат. Ушул эле сандар шашкалардын номерлерине дал келсин.

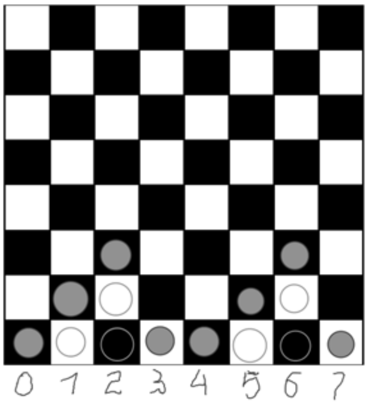
Өлчөмү 8×8 шашка тактасынын мисалында бардык шашкаларды негизги диагоналга тизип койсок болот.

Мисалы, минтип:

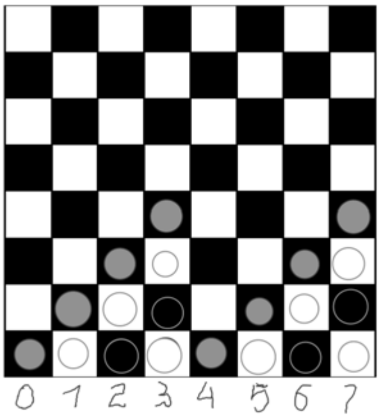
1 жана 5 шашкаларын тандап, 1 клеткага жогору жылдыруу керек.



2 жана 6 шашкаларын тандап, аларды эки жолу жогору жылдыруу керек.



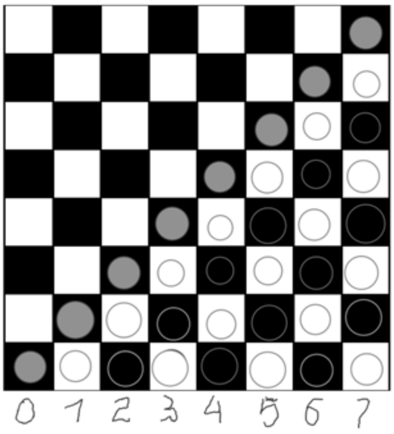
3 жана 7 шашкаларын тандап, аларды үч жолу жогору жылдыруу керек.



Эми 4 шашка негизги диагоналда турат, ал эми башка 4 шашканын ар бирин негизги диагоналдан 4 жүрүш бөлүп турат.

Аларды жуптарга бөлүп, жубу менен жылдырса болот. Мисалы, 4 жана 5 шашкаларынын жубу менен 4 жүрүш жана 6 жана 7 шашкаларынын жубу менен 4 жүрүш.

Жыйынтыгында бардык шашкалар негизги диагоналда тизилип калат.

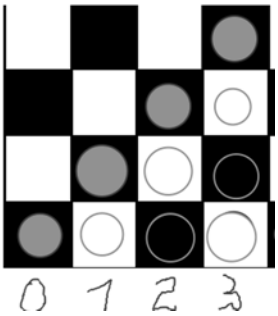


Жообу: мүмкүн.

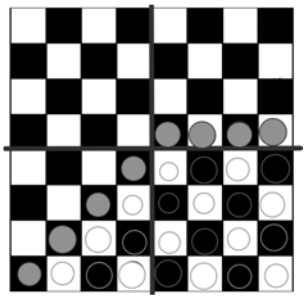
2-ыкма.

1) Өлчөмү 4×4 болгон шашка тактасын карап чыгалы:

2 жана 3; 2 жана 3; 1 жана 3 жуптары менен жүрүштөрдү аткарып, шашкаларды төмөнкү горизонталдан бул тактанын негизги горизонталына жылдырса болот.



2) 8×8 өлчөмүндөгү тактаны өлчөмү 4×4 болгон 4 чарчыга бөлүп койсо болот.

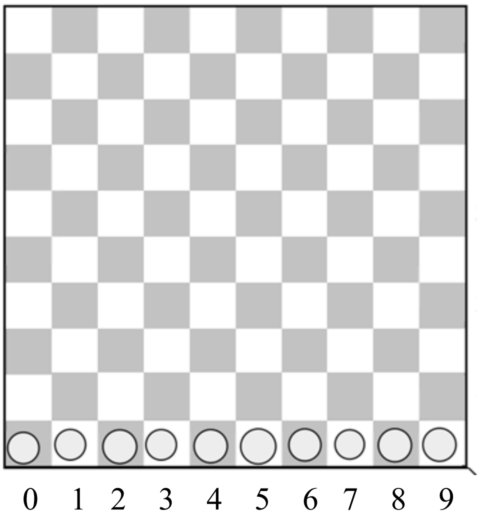


8 жүрүш менен төмөнкү оң чарчынын төмөнкү горизонталында турган шашкаларды жогорку оң чарчынын төмөнкү горизонталына жылдырса болот.

3) Андан ары 1) пункттагыдай.

Жообу: мүмкүн.

б) Өлчөмү 10×10 болгон шашка тактасын карап чыгалы:



Ар бир шашканын алдында аны негизги диагоналга жылдыруу үчүн аны менен канча жүрүш жасоо керектиги жазылып турат.

Бардык шашкалар чогуу жасаш керек болгон жүрүштөрдүн жалпы санын табалы:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=\frac{1+9}{2}\cdot 9=45.$$

Демек, жалпысынан алганда, шашкаларды 45 клеткага жылдыруу керек экен.

Ар бир жүрүш сайын 2 шашканы жылдырса болот, бирок ар бирин бир клеткага гана. Жүрүштөрдүн каалагандай санында шашкаларды клеткалардын жуп санына гана жылдыра алабыз, б.а., жүрүштөрдүн жалпы саны 45ке барабар боло албайт. Ошондуктан бардык жүз клеткалык тактанын төмөнкү горизонталында турган шашкаларды тактанын негизги диагоналына, маселеде сунушталган шартка ылайык, жылдыруу мүмкүн эмес.

Жообу: мүмкүн эмес.

№3 маселе.

Эгерде тик бурчтуу үч бурчтуктун ар бир катетинин узундугун 1ге узартса, анда гипотенузанын узундугу кайсы эң чоң санга узаруусу мүмкүн болот?

Чыгарылышы:

1-ыкма

a жана *b* – катеттердин узундуктары, ал эми *c* – тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасынын узундугу болсун дейли.

Ар бир катеттин узундугун 1ге узартканда, гипотенузанын узундугу $d=\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}-c=\sqrt{c^2+2(a+b)+2}-c$ болуп узарат.

Орто квдраттык жана орто арифметикалык барабарсыздыкка ылайык, $\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Барабардык $a=b$ шартында аткарылат.

Мындан: $a+b\le\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$.

Демек, $a+b\le\sqrt{2}\cdot c$,

$$d\le\sqrt{c^2+2\sqrt{2}c+2}-c,$$
$$d\le\sqrt{\left(c+\sqrt{2}\right)^2}-c,$$
$$d\le\sqrt{2}.$$

Барабардык $a=b$ шартында аткарылат.

Чындыгында эле, a катети менен тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасынын узундугу $a\sqrt{2}$ ге барабар. Эгерде ар бир катетти 1ге узартса, анда катети $(a+1)$ жана гипотенузасы $(a+1)\sqrt{2}$ болгон тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтук пайда болот. Гипотенузанын узундугу бул шартта $\sqrt{2}$ ге узарат.

Жообу: $\sqrt{2}$ ге.

2-ыкма.

Эгерде c гипотенузасына ээ тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчтарынын бири менен α га барабар болсо, анда бул үч бурчтуктун катеттери $c\cdot\sin\alpha$ жана $c\cdot\cos\alpha$ барабар болот.

Эгерде ар бир катетти 1ге узартканда гипотенузанын узундугу d га узарса, анда:

$$c+d=\sqrt{(c\cdot\sin\alpha+1)^2+(c\cdot\cos\alpha+1)^2}=\sqrt{c^2\cdot\sin^2\alpha+2c\cdot\sin\alpha+1+c^2\cdot\cos^2\alpha+2c\cdot\cos\alpha+1}=$$
$$=\sqrt{c^2+2c\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)+2}.$$

$$c^2+2c\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)+2=c^2+2\sqrt{2}c\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha\right)+2=$$
$$=c^2+2\sqrt{2}c\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+2\le c^2+2\sqrt{2}c\cdot 1+2=\left(c+\sqrt{2}\right)^2,$$

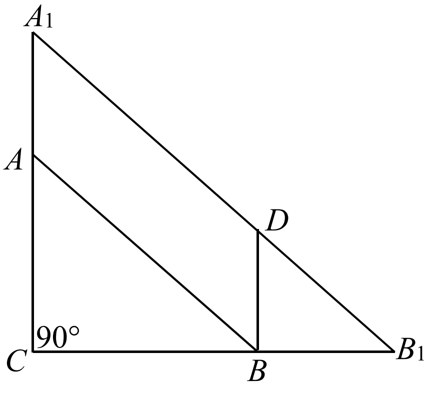
Барабардык $\alpha=\frac{\pi}{4}$ шартында аткарылат.

Ушундан улам $c+d\le c+\sqrt{2},\ d\le\sqrt{2}.$ Демек, тик бурчтуу үч бурчтуктун ар бир катетинин узундугу 1ге узарганда, анын гипотенузасынын узундугу узарышы мүмкүн болгон эң чоң сан $\sqrt{2}$ ге барабар.

Жообу: $\sqrt{2}$ ге.

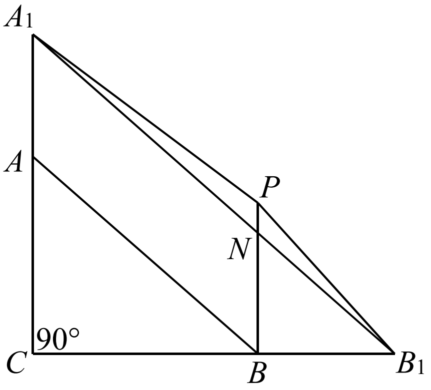
3-ыкма.

1) Тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтуктун ар бир катетинин узундугун 1ге узартканда, анын гипотенузасынын узундугу $\sqrt{2}$ ге узарат.



ABC жана A_1B_1C үч бурчтуктары тең капталдуу.
$BB_1=AA_1=1$, $BD\perp BC$,
D чекити A_1B_1 де жатат.
AA_1DB- параллелограмм, демек, $A_1D=AB,\ BD=1.$
$DB_1=\sqrt{2}.$
Демек, $A_1B_1-AB=A_1B_1-A_1D=DB_1=\sqrt{2}.$

2) AC жана BC катеттерине ээ ABC тик бурчтуу үч бурчтугун карап чыгалы. Аныктоо үчүн $AC < BC$ болсун дейли.



Ар бир катеттин узундугун 1ге узартып, A_1B_1C тик бурчтуу үч бурчтугун алабыз.

$A_1C < B_1C.$

$BP \perp BC,\ BP = 1$ жүргүзөбүз.

A_1B_1C жана NB_1B үч бурчтуктары окшош, демек, $BN < BB_1$ жана $BN < BP.$

Р чекити A_1B_1де жатпайт.

$AA_1BP -$ параллелограмм, демек, $A_1P = AB.$ Андан тышкары, $PB_1 = \sqrt{2}.$

A_1PB_1 үч бурчтугун карап чыгалы.

Үч бурчтуктун барабарсыздыгына ылайык, $A_1B_1 - A_1P < PB_1.$

$A_1B_1 - AB = A_1B_1 - A_1P < \sqrt{2}.$

3) Ушундан улам тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтуктун ар бир катетинин узундугун 1ге узартканда, анын гипотенузасынын узундугу $\sqrt{2}$ ге узарат. Ал эми баштапкы үч бурчтуктун катеттеринин узундуктары барабар эмес болсо, анда гипотенузанын узундугунун узаруусу $\sqrt{2}$ ден аз болот, б.а., гипотенузанын узундугу узарышы мүмкүн болгон эң чоң сан $\sqrt{2}$ ге барабар болот.

Жообу: $\sqrt{2}$ ге

4-ыкма.

Гипотенузанын узундугу узара турган чоңдукту функция катары карап, туундунун жардамы менен сан аралыгындагы функциянын эң чоң маанисин табуу боюнча маселенин чыгарылышынын алгоритмин колдонуу.