Решения задач областного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике для вывешивания на стенде.

I тур

Задача №1

В новом году стоимость однокомнатной квартиры уменьшилась на 10%, стоимость двухкомнатной квартиры уменьшилась на 20%, а суммарная стоимость двух этих квартир уменьшилась на 16%. Во сколько раз двухкомнатная квартира была дороже однокомнатной?

Решение
1 способ.

Пусть двухкомнатная квартира была дороже однокомнатной в k раз. Обозначив стоимость однокомнатной квартиры за x денежных единиц, составим таблицу.

Стоимость	В старом году	В новом году
Однокомнатной квартиры	x	$0,9x$
Двухкомнатной квартиры	$k \cdot x$	$0,8k \cdot x$
Суммарная	$(1+k) \cdot x$	$0,84 \cdot (1+k) \cdot x$

Составим уравнение

$$0,9x + 0,8kx = 0,84 \cdot (1+k) \cdot x,$$
$$0,04k = 0,06,$$
$$k = 1,5.$$

Т.о. двухкомнатная квартира в 1,5 раза дороже однокомнатной.

Ответ: в 1,5 раза

2 способ.
Обозначив стоимость однокомнатной квартиры за x денежных единиц, а стоимость двухкомнатной квартиры за y денежных единиц, составим таблицу.

Стоимость	В старом году	В новом году
Однокомнатной квартиры	x	$0,9x$
Двухкомнатной квартиры	y	$0,8y$
Суммарная	$x+y$	$0,84 \cdot (x+y)$

Составим уравнение
$$0,9x + 0,8y = 0,84 \cdot (x+y),$$
$$0,04y = 0,06x,$$
$$\frac{y}{x} = 1,5.$$
Т.о. двухкомнатная квартира в 1,5 раза дороже однокомнатной.

Ответ: в 1,5 раза.

Задача №2

Найдите все трёхзначные числа, которые при зачёркивании первой цифры уменьшаются в 5 раз.

Решение.

1 способ

При зачёркивании первой цифры трёхзначное число $\overline{xyz}$ превращается в двузначное число $\overline{yz}$. Зная, что при этом число уменьшилось в 5 раз, составим уравнение

$$100x+\overline{yz}=5\cdot\overline{yz}.$$

Откуда

$$100x=4\cdot\overline{yz},$$
$$25x=\overline{yz}.$$

Двузначное число $\overline{yz}$ кратно 25. Таких двузначных чисел три: 25 $(\text{при}\, x=1)$,
50 $(\text{при}\, x=2)$, 75 $(\text{при}\, x=3)$.

Т.о. существует три трёхзначных числа, которые при зачёркивании первой цифры уменьшаются в 5 раз: 125, 250, 375.

или

$$100x+10y+z=5\cdot(10y+z).$$

Откуда

$$25x=10y+z,$$
$$z=5\cdot(5x-2y)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z=5,\\5x-2y=1;\end{cases}\\\begin{cases}z=0,\\5x-2y=0;\end{cases}\end{array}\right.$$

Решив уравнения $5x-2y=1$ и $5x-2y=0$,

Получим пары чисел $(3;7)$, $(1;2)$, $(2;5)$.

(учитываем, что x и $y-$ цифры и $x\neq 0$).

И соответственно трёхзначные числа 375, 125 и 250.

Ответ: 125, 250, 375.

2 способ

Из условия задачи следует, что трёхзначное число делится на 5. Значит, последняя его цифра либо 0, либо 5. Но тогда двузначное число, полученное после зачеркивания первой цифры тоже оканчивается на 0 или 5 и кратно 5. Следовательно, трёхзначное число кратно 25 и оканчивается либо на 25, либо на 50, либо на 75 (на два нуля оканчиваться не может).

Т.о. искомые числа равны $5 \cdot 25 = 125,\ 5 \cdot 50 = 250,\ 5 \cdot 75 = 375.$

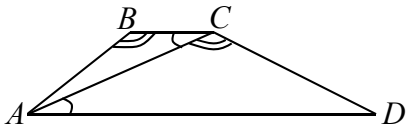
Ответ: 125, 250, 375.

Задача №3

Диагональ трапеции делит её на два подобных треугольника. Если отношение длин боковых сторон трапеции равно 2, то чему равно отношение длины большего основания этой трапеции к длине её меньшего основания?

Решение.

1 способ.



Диагональ AC делит трапецию $ABCD$ на два подобных треугольника ACD и CBA.

$\angle CAD = \angle BCA$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AC. Значит, коэффициент подобия треугольников ACD и CBA k равен отношению сходственных сторон CD и AB. $k = \dfrac{DC}{AB} = 2.$

По теореме об отношении площадей подобных треугольников $\dfrac{S(\triangle ACD)}{S(\triangle CBA)} = k^2 = 4.$

С другой стороны по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих равные высоты (или по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу)

$$\frac{S(\triangle ACD)}{S(\triangle CBA)} = \frac{AD}{BC}.$$

Откуда $\dfrac{AD}{BC} = 4.$

Ответ: 4

2 способ.

Вместо применения теорем об отношении площадей треугольников можно записать отношения других сходственных сторон:

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{BC}=\frac{DC}{AB}=2.$$

Откуда

$$\frac{AC}{BC}=2,$$
$$\frac{AD}{AC}=2.$$

Перемножив два последних равенства, получим $\frac{AD}{AC}\cdot\frac{AC}{BC}=2\cdot 2=4.$

Ответ: 4.

Задача №4

Каких семизначных чисел больше: тех, у которых цифры записаны в строго убывающем порядке или тех, у которых цифры записаны в строго возрастающем порядке? Ответ обоснуйте.

Решение.

1 способ.

Пусть *A* – множество семизначных чисел, у которых цифры записаны в строго убывающем порядке.

B – множество семизначных чисел, у которых цифры записаны в строго возрастающем порядке.

Подмножество *C* множества *A*, состоящее из чисел, не оканчивающихся 0, эквивалентно множеству *B*, т.е. можно установить взаимно однозначное соответствие между их элементами, если каждому числу из множества *C* поставить в соответствие число, записанное в обратном порядке. Например, числу 9754321 соответствует число 1234579 из множества *B* и наоборот. Значит число элементов множества *B* равно числу элементов множества *C*. Но число не может начинаться с 0, поэтому для чисел из множества *A*, оканчивающихся 0, не найдётся соответствующих им чисел в множестве *B*.

Т.о., число элементов множества *A* больше числа элементов множества *B*.

Значит, больше семизначных чисел, у которых цифры записаны в строго убывающем порядке.

Ответ: больше таких семизначных чисел, у которых цифры записаны в строго убывающем порядке.

2 способ.

Любые 7 различных цифр можно единственным образом записать в порядке убывания. Значит, количество семизначных чисел, у которых цифры записаны в строго убывающем порядке, равно количеству способов выбрать 7 цифр из 10 возможных, т.е. количеству сочетаний из 10 по 7: $C_{10}^{7}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{6}=120.$

При вычислении количества семизначных чисел, у которых цифры записаны в строго возрастающем порядке, надо учитывать, что с 0 число начинаться не может и 0, как наименьшая цифра, не может занимать другие позиции в числе. Значит, выбирать надо 7 из 9 цифр, и это можно сделать $C_{9}^{7}=\frac{9!}{7!\cdot 2!}=\frac{8\cdot 9}{2}=36$ способами.

120>36.

Значит, больше семизначных чисел, у которых цифры записаны в строго убывающем порядке.

Ответ: больше семизначных чисел, у которых цифры записаны в строго убывающем порядке.

Задача №5.

Найдите наименьшее из чисел: $\sin(\sin 2),\sin(\cos 2),\cos(\cos 2),\cos(\sin 2).$

Решение.

Число 2 принадлежит II координатной четверти, значит,

$-1<\cos 2<0,\ 0<\sin 2<1.$

Т.о. число cos 2 лежит в IV четверти, а число sin 2 в I четверти. Следовательно,

$\sin(\sin 2)>0,\ \sin(\cos 2)<0,\ \cos(\cos 2)>0,\ \cos(\sin 2)>0.$

Наименьшее из четырёх данных чисел это число

$\sin(\cos 2).$

Ответ: $\sin(\cos 2).$

Задача №6

Решите уравнение $\log_2\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right)=1-\sqrt{6x-x^2-8}.$

Решение.

1 способ.

Оценим левую и правую часть данного уравнения.

Левая часть определена при $x>0.$

При $x>0$ сумма двух взаимно обратных чисел $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\geq 2.$

$\log_2\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right)\geq 1.$

Рассмотрим правую часть равенства

$1-\sqrt{6x-x^2-8}=1-\sqrt{1-(3-x)^2}\leq 1.$

Значит, равенство возможно тогда и только тогда, когда и левая, и правая части этого равенства равны 1.

$$\begin{cases}\log_2\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right)=1,\\ 1-\sqrt{6x-x^2-8}=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{4}{x}=2,\\ 6x-x^2-8=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4,\\ \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=4;\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4

2 способ.

Можно оценить только одну часть равенства. Например, левую:

при $x>0$ сумма двух взаимно обратных чисел $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\geq 2$ и $\log_2\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right)\geq 1.$

Тогда и правая часть может принимать только значения, не меньше 1.

$$1-\sqrt{6x-x^2-8}\geq 1\Leftrightarrow\sqrt{6x-x^2-8}\leq 0\Leftrightarrow 6x-x^2-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=4.\end{array}\right.$$

Необходимо проверить, при каком из найденных значений уравнение обращается в верное равенство.

1) $x=2,$

$\log_2\left(\frac{2}{4}+\frac{4}{2}\right)=1-\sqrt{6\cdot 2-4-8},$

$\log_2 2{,}5=1-$ неверное равенство.

2) $x=4,$

$\log_2\left(\frac{4}{4}+\frac{4}{4}\right)=1-\sqrt{6\cdot 4-16-8},$

$\log_2 2=1-$ верное равенство.

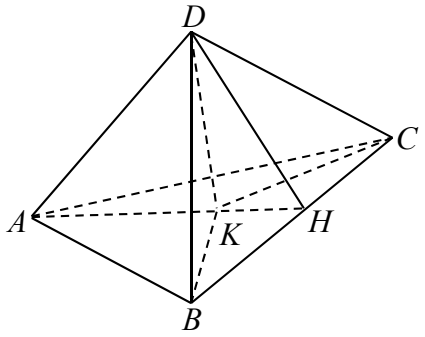
Значит, решением данного уравнения является $x=4.$

Ответ: $x=4.$

Задача №7

Плоские углы при вершине D тетраэдра $DABC$ прямые. Площадь основания ABC равна $S,$ а площадь проекции боковой грани DBC на плоскость основания равна $Q.$ Найдите площадь грани $DBC.$

Решение.



1 способ.

Т.к. $(AD)\perp(DC)$ и $(AD)\perp(DB),$ то $(AD)\perp(DBC).$ значит, треугольник DBC является проекцией треугольника ABC на плоскость $(DBC).$

Если $\alpha-$ угол между плоскостями (ABC) и $(DBC),$ то по теореме о площади проекции многоугольника.

$S(\triangle DBC)=\frac{Q}{\cos\alpha},\ S(\triangle DBC)=S\cdot\cos\alpha.$

Перемножив эти равенства, получим $S^2(\triangle DBC)=S\cdot Q.$

Откуда $S(\triangle DBC)=\sqrt{S\cdot Q}.$

Ответ: $\sqrt{S\cdot Q}.$

2 способ.

1) Доказать, что проекция вершины *D* на плоскость основания *ABC* лежит на высоте *AH* треугольника *ABC*.

2) Заметив, что треугольники *ABC*, *BKC* и *BDC* имеют общее основание *BC*, найти соотношение между их высотами.

Используя метрические соотношения в прямоугольном треугольнике *ADH* или подобие треугольников *ADH* и *DKH*, доказать что $DH = \sqrt{AH \cdot KH}$, откуда $S\left(\triangle DBC\right) = \sqrt{S \cdot Q}$.

Ответ: $\sqrt{S \cdot Q}$