Математика боюнча окуучулардын Республикалык олимпиадасынын облустук этабынын маселелеринин чыгарылыштары (стендге илүү үчүн).

I тур

№1 маселе.

Жаңы жылда бир бөлмөлүү батирдин баасы 10%га, эки бөлмөлүү батирдин баасы 20%га, ал эми бул батирлердин жалпы баасы 16%га төмөндөгөн. Эки бөлмөлүү батир бир бөлмөлүү батирден канча эсе кымбат болгон?

Чыгарылышы:

1-ыкма.

Эки бөлмөлүү батир бир бөлмөлүү батирден k эсе кымбат болсун дейли. Бир бөлмөлүү батирдин баасын x акчалай бирдик деп белгилеп, таблица түзөбүз.

Баасы	Былтыр	Быйыл
Бир бөлмөлүү батирдин	x	$0,9x$
Эки бөлмөлүү батирдин	$k \cdot x$	$0,8k \cdot x$
Жалпы	$(1+k) \cdot x$	$0,84 \cdot (1+k) \cdot x$

Теңдеме түзөбүз:

$$0,9x + 0,8kx = 0,84 \cdot (1+k) \cdot x;$$
$$0,04k = 0,06;$$
$$k = 1,5.$$

Ушундан улам эки бөлмөлүү батир бир бөлмөлүү батирден 1,5 эсе кымбат.

Жообу: 1,5 эсе кымбат

2-ыкма.

Бир бөлмөлүү батирдин баасын x акчалай бирдик, ал эми эки бөлмөлүү батирдин баасын y акчалай бирдик деп белгилеп, таблица түзөбүз.

Баасы	Былтыр	Быйыл
Бир бөлмөлүү батирдин	x	$0,9x$
Эки бөлмөлүү батирдин	y	$0,8y$
Жалпы	$x + y$	$0,84 \cdot (x+y)$

Теңдеме түзөбүз:

$$0,9x+0,8y=0,84\cdot(x+y);$$
$$0,04y=0,06x;$$
$$\frac{y}{x}=1,5.$$

Ушундан улам эки бөлмөлүү батир бир бөлмөлүү батирден 1,5 эсе кымбат.

Жообу:1,5 эсе кымбат.

№2 маселе.

Биринчи цифрасын чийип салганда 5 эсе азайган бардык үч орундуу сандарды тапкыла.

Чыгарылышы:

1-ыкма.

Биринчи цифраны чийип салгандан кийин $\overline{xyz}$ үч орундуу саны $\overline{yz}$ эки орундуу санына айланат. Бул өзгөрүүдөн кийин сан 5 эсе азайгандыгын билип туруп, $100x+\overline{yz}=5\cdot\overline{yz}$ теңдемесин түзөбүз.

Мындан:

$$100x=4\cdot\overline{yz},$$
$$25x=\overline{yz}.$$

$\overline{yz}$ эки орундуу саны 25ке эселүү. Мындай эки орундуу сандан үчөө: 25 $(x=1 \text{ шартында})$, 50 $(x=2 \text{ шартында})$, 75 $(x=3 \text{ шартында})$.

Демек, биринчи цифрасын чийип салган учурда 5 эсе азайган үч орундуу сандан үчөө бар экен: 125, 250, 375.

же

$$100x+10y+z=5\cdot(10y+z).$$

Мындан

$25x = 10y + z,$

$$z = 5\cdot(5x-2y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} z = 5, \\ 5x - 2y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} z = 0, \\ 5x - 2y = 0; \end{cases}\end{array}\right.$$

$5x - 2y = 1$ жана $5x - 2y = 0$ теңдемелерин чыгарып,

$(3;7)$, $(1;2)$ жана $(2;5)$ сандарынын жуптарын алабыз.

(x жана $y-$ цифралар жана $x \neq 0$ экендигин эске алабыз).

Демек, үч орундуу сандар: 375, 125 жана 250.

Жообу: 125, 250, 375.

2-ыкма.

Маселенин шартынан үч орундуу сан 5ке бөлүнөрү анык. Демек, ал сандын акыркы цифрасы же 0, же 5. Анда бул учурда биринчи цифрасын чийип салгандан кийин келип чыккан эки орундуу сан да 0 же 5 менен аяктап, 5ке эселүү болушу керек. Демек, үч орундуу сан 25ке эселүү жана 25, же 50, же 75 менен аяктайт (эки нөл менен аяктабайт).

Демек, изделип жаткан сандар $5\cdot25 = 125,\ 5\cdot50 = 250,\ 5\cdot75 = 375.$

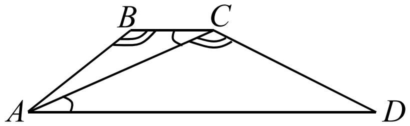
Жообу: 125, 250, 375.

№3 маселе.

Трапециянын диагоналы аны эки окшош үч бурчтукка бөлүп турат. Эгерде трапециянын каптал жактарынын узундуктарынын катышы 2ге барабар болсо, анда бул трапециянын чоң негизинин узундугунун анын кичине негизинин узундугуна болгон катышы канчага барабар?

Чыгарылышы:

1-ыкма.



AC диагоналы $ABCD$ трапециясын ACD жана CBA эки окшош үч бурчтукка бөлүп турат.

AD жана BC параллелдүү түз сызыктарынын жана AC кесүүчү сызыгынын шартында ички кайчылаш келип жаткан бурчтар катары $\angle CAD = \angle BCA$. Демек, ACD жана CBA үч бурчтуктарынын k окшоштук коэффициенти CD жана AB окшош жактарынын катышына барабар. $k = \frac{DC}{AB} = 2$.

Окшош үч бурчтуктардын аянттарынын катыштары жөнүндөгү теорема боюнча:

$$\frac{S(\triangle ACD)}{S(\triangle CBA)} = k^2 = 4.$$

Башка жагынан алып караганда, бийиктиги бирдей үч бурчтуктардын аянттарынын катыштары жөнүндөгү теорема (же бир бурчу бирдей үч бурчтуктардын аянттарынын катышы жөнүндөгү теорема) боюнча:

$$\frac{S(\triangle ACD)}{S(\triangle CBA)} = \frac{AD}{BC}.$$

Мындан $\frac{AD}{BC} = 4$.

Жообу: 4

2-ыкма.

Үч бурчтуктардын аянттарынын катышы жөнүндө теоремаларды колдонуунун ордуна башка окшош жактарынын катыштарын жазып койсо болот:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AB} = 2.$$

Мындан:

$$\frac{AC}{BC} = 2,$$
$$\frac{AD}{AC} = 2.$$

Эки акыркы барабардыкты бири-бирине көбөйтүп, төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{AD}{AC} \cdot \frac{AC}{BC} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Жообу: 4.

№4 маселе.

Жети орундуу сандардын кайсылары көбүрөөк: цифралары так кемүү тартибинде жазылганыбы же цифралары так өсүү тартибинде жазылганыбы? Жообуңарды негиздеп бергиле.

Чыгарылышы:

1-ыкма.

A цифралары так кемүү тартибинде жазылган жети орундуу сандардын көптүгү болсун.

B цифралары так өсүү тартибинде жазылган жети орундуу сандардын көптүгү болсун.

A көптүгүндө камтылган 0 саны менен аяктабаган сандардан турган *C* көптүгү *B* көптүгүнө эквиваленттүү. Башкача айтканда, эгерде *C* көптүгүндөгү ар бир санга тескери иретте жазылган санды дал келтирсе, анда алардын элементтеринин ортосунда бир маанилүү өз ара дал келүүнү байкоого болот. Мисалы, 9754321 санына *B* көптүгүнөн 1234579 саны дал келет же тескерисинче. Демек, *B* көптүгүндөгү элементтердин саны *C* көптүгүндөгү элементтердин санына барабар. Бирок бул сан 0дөн башталбайт, ошондуктан *A* көптүгүндөгү 0 менен аяктаган сандар үчүн *B* көптүгүндө аларга дал келген сандар табылбайт.

Демек, *A* көптүгүндөгү элементтердин саны В көптүгүндөгү элементтердин санынан көбүрөөк.

Демек, цифралары так кемүү тартибинде жазылган жети орундуу сандар көбүрөөк.

Жообу: цифралары так кемүү тартибинде жазылган жети орундуу сандар көбүрөөк.

2-ыкма.

Каалаган 7 ар башка цифраларды кемүү тартибинде жазуунун бир гана жолу бар. Демек, цифралары так кемүү тартибинде жазылган жети орундуу сандардын саны 10 мүмкүн болгон цифрадан 7 цифраны тандоо ыкмаларынын санына барабар, б.а., 10дон 7ге чейинки айкалыштыруулардын санына: $C_{10}^{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120.$

Цифралары так өсүү тартибинде жазылган жети орундуу сандардын санын эсептеген учурда бул сан 0дөн башталуусу мүмкүн эместигин жана 0 эң кичине сан катары сандын башка ордунда жайгаша албастыгын эске алуу керек. Демек, 9 цифрадан 7 цифраны тандоо керек, муну $C_{9}^{7} = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$ ыкма менен аткарса болот.

120>36.

Демек, цифралары так кемүү тартибинде жазылган жети орундуу сандар көбүрөөк.

Жообу: цифралары так кемүү тартибинде жазылган жети орундуу сандар көбүрөөк.

№5 маселе.

$\sin(\sin 2), \sin(\cos 2), \cos(\cos 2), \cos(\sin 2)$ сандарынын эң кичинесин тапкыла.

Чыгарылышы:

2 саны II координаталык чейрекке тиешелүү, демек,

$-1 < \cos 2 < 0,\ 0 < \sin 2 < 1.$

Ушундан улам cos2 саны IV чейректе, ал эми sin2 саны I чейректе жатат. Демек,

$\sin(\sin 2) > 0,\ \sin(\cos 2) < 0,\ \cos(\cos 2) > 0,\ \cos(\sin 2) > 0.$

Берилген төрт сандын эң кичинеси – $\sin(\cos 2)$.

Жообу: $\sin(\cos 2)$.

№6 маселе.

$\log_2\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right)=1-\sqrt{6x-x^2-8}$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгарылышы:

1-ыкма.

Бул теңдеменин сол жана оң жагын карап чыгалы.

Сол жагы $x>0$ шартында берилген.

$x>0$ шартындагы эки өз ара тескери сандардын суммасы $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\geq 2$.

$\log_2\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right)\geq 1.$

Барабардыктын оң жагын карап чыгалы:

$1-\sqrt{6x-x^2-8}=1-\sqrt{1-(3-x)^2}\leq 1.$

Демек, бул барабардыктын сол тарабы да, оң тарабы да 1ге барабар болгондо гана барабардык орундалат.

$$\begin{cases}\log_2\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right)=1,\\ 1-\sqrt{6x-x^2-8}=1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{4}{x}=2,\\ 6x-x^2-8=0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4,\\ \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=4;\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Жообу: 4

2-ыкма.

Барабардыктын бир жагын гана карап чыкса болот. Мисалы, сол жагын:

$x>0$ шартында эки өз ара тескери сандардын суммасы $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\geq 2$ жана $\log_2\left(\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right)\geq 1.$

Анда теңдеменин оң жагы да 1ден кичине эмес маанилерди кабыл алат.

$$1-\sqrt{6x-x^2-8}\geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{6x-x^2-8}\leq 0 \Leftrightarrow 6x-x^2-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Теңдеме табылган маанилердин кайсынысында туура барабардыкка айланарын текшерүү керек.

1) $x=2$,

$\log_2\left(\frac{2}{4}+\frac{4}{2}\right)=1-\sqrt{6\cdot 2-4-8}$,

$\log_2 2,5=1-$ туура эмес барабардык.

2) $x=4$,

$\log_2\left(\frac{4}{4}+\frac{4}{4}\right)=1-\sqrt{6\cdot 4-16-8}$,

$\log_2 2=1-$ туура барабардык.

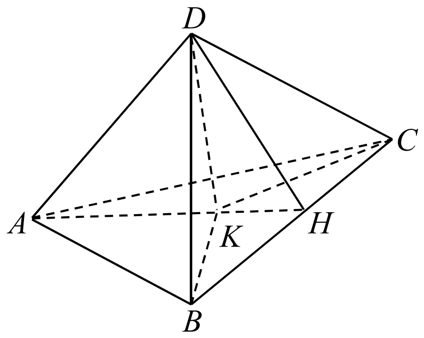
Демек, бул барабардыктын чыгарылышы $x=4$ болуп эсептелет.

Жообу: $x=4$.

№7 маселе.

$DABC$ тетраэдринин D чокусундагы жалпак бурчтар – тик бурчтар. ABC негизинин аянты S ке барабар, ал эми DBC каптал гранынын негиздин тегиздигине болгон проекциясынын аянты Q га барабар. DBC гранынын аянтын тапкыла.

Чыгарылышы:



1-ыкма.

$(AD)\perp(DC)$ жана $(AD)\perp(DB)$ болгондуктан, анда $(AD)\perp(DBC)$ болот. Демек, DBC үч бурчтугу ABC үч бурчтугунун (DBC) тегиздигине болгон проекциясы болуп эсептелет.

Эгерде α – (ABC) жана (DBC) тегиздиктеринин арасындагы бурч болсо, анда көп бурчтуктун проекциясынын теоремасы боюнча: $S(\triangle DBC)=\dfrac{Q}{\cos\alpha}$, $S(\triangle DBC)=S\cdot\cos\alpha$.

Бул барабардыктарды бири-бирине көбөйтүп, $S^2(\triangle DBC)=S\cdot Q$ ну алабыз.

Мындан $S(\triangle DBC)=\sqrt{S\cdot Q}$.

Жообу: $\sqrt{S\cdot Q}$.

2-ыкма.

1) D чокусунун ABC негизинин тегиздигине болгон проекциясы ABC үч бурчтугунун AH бийиктигинде жатканын далилдөө.
2) ABC, BKC жана BDC үч бурчтуктары жалпы BC негизине ээ экенин байкап, алардын бийиктиктеринин арасындагы катышын табуу.

ADH тик бурчтуу үч бурчтугундагы метрикалык катыштарды же ADH жана DKH үч бурчтуктарынын окшоштугун пайдаланып, $DH=\sqrt{AH\cdot KH}$ болгондугун далилдөө, мындан $S(\triangle DBC)=\sqrt{S\cdot Q}$.

Жообу: $\sqrt{S\cdot Q}$