Критерии оценивания районного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике для вывешивания на стенде т для жюри.

I тур

Критерии оценки заданий по математике

За любое задание 1 тура районного этапа олимпиады школьников по математике ставится

- 1 балл, если получен правильный ответ;
- 0 баллов, если получен неправильный ответ, решение не доведено до конца или решение отсутствует.

Решения задач

Задание 1.

Произведение действительных корней уравнения $x^4-2x^2-15=0$ равно

Решение.

$$x^4-2x^2-15=0 \Leftrightarrow \left(x^2-5\right)\cdot\left(x^2+3\right)=0 \Leftrightarrow x^2-5=0,$$
$$x_1=-\sqrt{5},\ x_2=\sqrt{5},\ x_1\cdot x_2=-5.$$

Ответ: -5.

Задание 2.

На сколько нулей оканчивается произведение первых ста простых чисел?

Решение.

Среди простых чисел единственное чётное число 2, а единственное число, кратное 5 – число 5. $2\cdot 5=10.$ Остальные множители простые нечётные числа. Значит, произведение оканчивается одним нулём.

Ответ: 1.

Задание 3.

$$2\cos^2\alpha-\frac{3}{ctg^2\alpha+1}+5\sin^2\alpha=$$

Решение.

$$2\cos^2\alpha-\frac{3}{ctg^2\alpha+1}+5\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-\frac{3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}+5\sin^2\alpha=$$
$$=2\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha+5\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha=2.$$

Ответ: 2.

Задание 4.

$$\left(2,5\sqrt[3]{4\sqrt{2}}+1,5\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^{\frac{18}{17}}=$$

Решение.

$$\left(2,5\sqrt[3]{4\sqrt{2}}+1,5\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^{\frac{18}{17}}=\left(2,5\sqrt[3]{\sqrt{2^5}}+1,5\sqrt{\sqrt[3]{2^5}}\right)^{\frac{18}{17}}=\left(2,5\sqrt[6]{2^5}+1,5\sqrt[6]{2^5}\right)^{\frac{18}{17}}=$$

$$=\left(4\sqrt[6]{2^5}\right)^{\frac{18}{17}}=\left(2^{\frac{17}{6}}\right)^{\frac{18}{17}}=2^3=8.$$

Ответ: 8.

Задание 5.

Остаток от деления 2^{2021} на 5 равен

Решение.

$2^{2021}=\left(2^4\right)^{505}\cdot 2=16^{505}\cdot 2.$ 16^{505} оканчивается на 6, значит $16^{505}\cdot 2$ оканчивается на 2 и при делении на 5 даёт остаток 2.

Ответ: 2.

Задание 6.

Если среднее арифметическое 99 последовательных целых чисел равно 99, то наименьшее из этих чисел равно

Решение.

Пусть среднее из 99 последовательных чисел равно x. Тогда эта последовательность имеет вид: $x-49,\ x-48,\ \dots,\ x-1,\ x,\ x+1,\ \dots,\ x+48,\ x+49.$

$$\frac{(x-49)+(x-48)+\dots+(x-1)+x+(x+1)+\dots+(x+48)+(x+49)}{99}=99,$$

$x=99,\ x-49=50.$

Ответ: 50.

Задание 7.

Разность квадратов двух натуральных чисел равна 17. Найдите сумму квадратов этих чисел.

Решение.

Пусть эти числа m и n, тогда $m^2 - n^2 = 17$.

$$m^2 - n^2 = 17 \Leftrightarrow (m-n)\cdot(m+n) = 17,$$

$$\begin{cases} m - n = 1, \\ m + n = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9, \\ n = 8. \end{cases}$$

$$m^2 + n^2 = 145.$$

Ответ: 145.

Задание 8.

Из Бишкека в Балыкчи ровно через час отходят автобусы. Каждый из них стоит в Балыкчи 0,5 часа, а потом возвращается в Бишкек.

Если автобус преодолевает расстояние между Бишкеком и Балыкчи за 3 часа, то сколько автобусов, следующих из Бишкека в Балыкчи, он встретит на обратном пути?

Решение.

Если, например, автобус вышел из Бишкека в 08:00, то назад в Бишкек он вернётся в 14:30. На обратном пути он встретит автобусы, вышедшие из Бишкека в 09:00, 10:00, 11:00, 12:00, 13:00 и 14:00, т.е. 6 автобусов.

Ответ: 6.

Задание 9.

При превращении воды в лёд её объём увеличивается на $\frac{1}{11}$ часть.

На какую часть уменьшается объём льда при таянии?

Решение.

Пусть было 11 частей воды. При замерзании объём увеличился на $\frac{1}{11}$.

Всего стало 12 частей. При таянии объём снова уменьшился до 11 частей, т.е. на $\frac{1}{12}$.

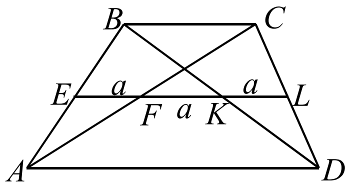
Ответ: на $\frac{1}{12}$.

Задание 10.

Если диагонали трапеции делят её среднюю линию на три равных отрезка, то отношение длины большего основания этой трапеции к длине её меньшего основания равно

Решение.

Пусть $EF = FK = KL = a$.



EF – средняя линия треугольника ABC, FL – средняя линия треугольника ACD. По теореме о средней линии треугольника $BC = 2 \cdot EF = 2a$, $AD = 2 \cdot FL = 4a$.

Т.о. $AD : BC = 2$.

Ответ: 2.

Задание 11.

Вниманию организаторов олимпиады!

В связи с тем, что в тетради по **математике** на кыргызском языке **(в задании №11)** была допущена опечатка, каждому участнику олимпиады по математике будет **добавлен один балл за это задание**, независимо от того, на русском или кыргызском языке работал участник.

Задание 12.

Запишите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение цифр равно 60.

Решение.

$60 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5.$

Искомое число не может быть пятизначным, поскольку по условию цифры в числе различны. Из всех возможных четырёхзначных чисел наибольшее 6521.

Ответ: 6521.

Задание 13.

$tg15^0 + ctg15^0 =$

Решение.

$$tg15^0 + ctg15^0 = \frac{\sin^2 15^0 + \cos^2 15^0}{\sin 15^0 \cdot \cos 15^0} = \frac{2}{2\sin 15^0 \cdot \cos 15^0} = \frac{2}{\sin 30^0} = 4.$$

Ответ: 4.

Задание 14.

Среднее геометрическое трёх чисел равно 6. Если среднее геометрическое двух из них равно 3, то третье число равно

Решение.

$\sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} = 6,\ \sqrt{x \cdot y} = 3,\ x \cdot y = 9,$

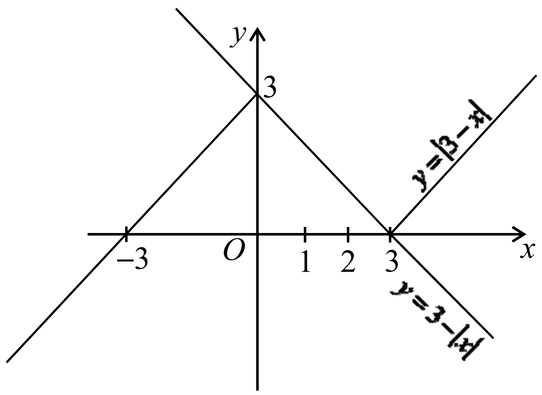
$\sqrt[3]{9 \cdot z} = 6,\ z = 24.$

Ответ: 24.

Задание 15.

Сколько целочисленных решений имеет уравнение $|3 - x| = 3 - |x|$?

Решение.



При $x \in [0;3]$ графики функций $y = |3 - x|$ и $y = 3 - |x|$ совпадают.

Значит, $|3 - x| = 3 - |x| \Leftrightarrow x \in [0;3]$.

Уравнение имеет 4 целочисленных решения: 0; 1; 2; 3.

Ответ: 4.

Задание 16.

Если $2^x \cdot 5^y = 80,\ 2^y \cdot 5^x = 125,$ то $x + y =$

Решение.

$$\begin{array}{l|l} 2^x \cdot 5^y = 80 & \\ 2^y \cdot 5^x = 125 & \times \end{array}$$
$$\overline{}$$
$10^{x+y} = 10000,\ x + y = 4.$

Ответ: 4.

Задание 17.

$\left|5-\sqrt{10}\right| + \left|2-\sqrt{10}\right| =$

Решение.

$5-\sqrt{10} > 0,\ 2-\sqrt{10} < 0,$ значит, $\left|5-\sqrt{10}\right| + \left|2-\sqrt{10}\right| = 5-\sqrt{10}+\sqrt{10}-2 = 3.$

Ответ: 3.

Задание 18.

Сумма корней уравнения $\left(5-9x-2x^2\right)\cdot\sqrt{6-x-2x^2} = 0$ равна

Решение.

$$\left(5-9x-2x^2\right)\cdot\sqrt{6-x-2x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6-x-2x^2 = 0, \\ \begin{cases} 5-9x-2x^2 = 0, \\ 6-x-2x^2 \geq 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 1{,}5, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -5, \\ x = 0{,}5, \end{array}\right. \\ 6-x-2x^2 \geq 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x-6 \leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 1{,}5, \\ x = -5, \\ x = 0{,}5, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 1{,}5, \\ x = -5, \\ x = 0{,}5, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 1{,}5, \\ x = 0{,}5. \end{array}\right.$$

$-2+0{,}5+1{,}5 = 0.$

Ответ: 0.

Задание 19.

Длину стороны квадрата увеличили на 20 процентов. На сколько процентов увеличилась площадь квадрата?

Решение.

Площадь квадрата со стороной a равна a^2. При увеличении длины стороны на 20% длина стороны стала равна $1,2a$, площадь квадрата $1,44a^2$.

Т.о. площадь квадрата увеличилась на 44%.

Ответ: на 44%.

Задание 20.

Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости её основания под углом 60°. Площадь основания пирамиды равна S. Найдите площадь полной поверхности этой пирамиды.

Решение.

$$S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.} = \frac{S_{осн.}}{\cos 60^0} + S_{осн.} = 2S + S = 3S.$$

Ответ: 3S.

Задание 21.

Трёх мальчиков и двух девочек нужно посадить на скамейку так, чтобы никакие два мальчика не сидели рядом.

Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Места должны чередоваться следующим образом: М Д М Д М (М – место для мальчика, Д – место для девочки). Мальчиков можно посадить на этих местах $3!$ способами, а девочек $2!$ способами. Согласно правилу произведения всего существует $(3!)\cdot(2!) = 6\cdot 2 = 12$ способов посадить на скамейку трёх мальчиков и двух девочек так, чтобы никакие два мальчика не сидели рядом.

Ответ: 12.