Районный этап Республиканской олимпиады школьников по математике

Ключи для вывешивания.

II тур

Задача 1

Найдите все пары простых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению
$y^2 - x^2 - 23y + x + 132 = 0.$

Решение

1) Заменим данное уравнение совокупностью двух линейных уравнений с двумя переменными.

Это можно сделать, решив данное уравнение как квадратное относительно переменной y

$$y^2 - 23y - x^2 + x + 132 = 0$$
$$D = (-23)^2 - 4(x^2 + x + 132) = 529 + 4x^2 - 4x - 529 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$$

$$y = \frac{23 \pm (2x-1)}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x + 11, \\ y = 12 - x. \end{array}\right.$$

или

Разложив левую часть уравнения на множители:

$$y^2 - x^2 - 23y + x + 132 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(y-x)\cdot(y+x) - 12y - 11y + 12x - 11x + 11\cdot 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y-x)\cdot(y+x) - 12\cdot(y-x) - 11\cdot(y+x) + 11\cdot 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(y-x)\cdot(y+x-12) - 11\cdot(y+x-12) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y-x-11)\cdot(y+x-12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - x - 11 = 0, \\ y + x - 12 = 0. \end{array}\right.$$

Решим уравнения $y = x + 11\ (1)$ и $y = 12 - x\ (2)$ в простых числах.

2) Решение уравнения (1).

Если $x -$ нечётное, то $y -$ чётное число, большее 11, тогда y не может быть простым числом.

Единственное чётное простое число равно 2. Если $x = 2,$ то $y = 13 -$ простое число.

Т.о. пара чисел (2;13) – единственное решение уравнения (1) в простых числах.

3) Решение уравнения (2).

Т.к. сумма чисел x и y равна чётному числу 12, то эти числа одинаковой чётности. Но среди простых чисел только одно чётное число, поэтому x и y могут быть только нечётными простыми числами, причём $1 < x < 12$.

Этому условию удовлетворяют значения $x \in \{3; 5; 7; 11\}$.

При $x = 3$ $y = 9 -$ не является простым числом,
при $x = 5$ $y = 7 -$ простое число,
при $x = 7$ $y = 5 -$ простое число,
при $x = 11$ $y = 1 -$ не является простым числом.

Т.о. решением уравнения (2) в простых числах являются пары чисел (5;7) и (7;5).

Уравнению $y^2 - x^2 - 23y + x + 132 = 0$ удовлетворяют следующие пары простых чисел: (2;13), (5;7), (7;5).

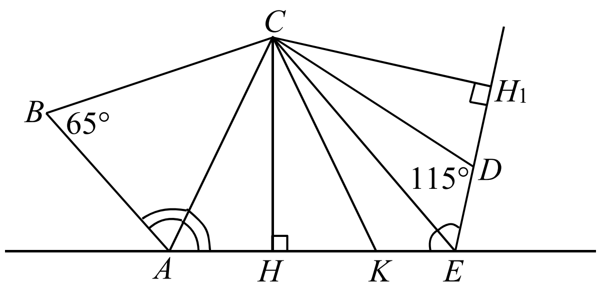
Ответ: (2;13), (5;7), (7;5).

Задача 2

В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle CBA = 65°$, $\angle CDE = 115°$, а диагонали AC и EC являются биссектрисами внутренних углов BAE и AED этого пятиугольника. Площадь треугольника ACE равна S. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

Решение

1 способ



1) Т.к. диагонали AC и EC являются биссектрисами внутренних углов BAE и AED пятиугольника, то углы CEA и CAE – острые. Высота CH лежит внутри треугольника ACE и $HE < AE$. Высота CH_1 треугольника ECD лежит вне треугольника и $ED < EH_1$.

Поскольку EC – биссектриса угла AED, то $EH_1 = EH$.

$ED < EH_1 = EH < AE$.

Значит, $ED < AE$.

2) Возьмём на стороне AE точку K так, что $EK = ED$.

Рассмотрим треугольники CKE и CDE:

$\angle CEK = \angle CED$, т.к. CE – биссектриса $\angle AED$, $KE = DE$ по построению, CE – общая.

Значит, $\triangle CKE = \triangle CDE$, $\angle CKE = 115°$, $\angle CKA = 180° - 115° = 65°$(как смежный).

Замечание.

Для доказательства равенства треугольников можно воспользоваться свойством биссектрисы неразвёрнутого угла и свойствами осевой симметрии.

3) Рассмотрим треугольники CAB и CAK:

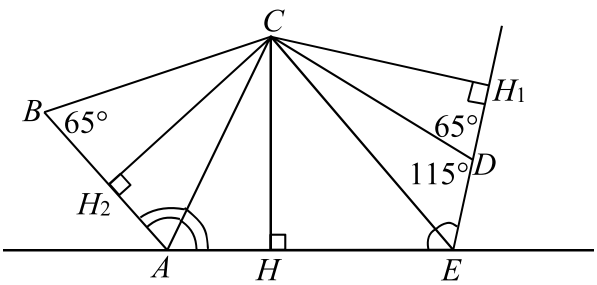
$\angle CKA = \angle CBA$ по доказанному,
$\angle CAK = \angle CAB$ по условию (AC – биссектриса $\angle$BAE), сторона CA общая.

Значит, $\triangle CAB = \triangle CAK$ по стороне и двум углам.

4) По свойствам площади

$$S(\triangle CBA) = S(\triangle CAK),\ S(\triangle CDE) = S(\triangle CKE),$$
$$S(ABCDE) = S(\triangle CBA) + S(\triangle CAE) + S(\triangle CDE) = S(\triangle CAK) + S(\triangle CAE) + S(\triangle CKE) =$$
$$= \left(S(\triangle CAK) + S(\triangle CKE)\right) + S(\triangle CAE) = S(\triangle CAE) + S(\triangle CAE) = 2S.$$

2 способ.



1) Т.к. C – точка пересечения биссектрис AC и EC углов BAE и AED, то точка C равноудалена от прямых BA, AE и ED.

Если расстояние от точки C до этих прямых равно h. Тогда

$$S(ABCDE) = S(\triangle CBA) + S(\triangle CAE) + S(\triangle CDE) = \frac{1}{2}\cdot BA\cdot CH_2 + \frac{1}{2}\cdot AE\cdot CH + \frac{1}{2}\cdot ED\cdot CH_1 =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot BA\cdot h + \frac{1}{2}\cdot AE\cdot h + \frac{1}{2}\cdot ED\cdot h = \frac{1}{2}h\cdot\left(BA + AE + ED\right).$$

2) а) $\triangle CBH_2 = \triangle CDH_1$ по катету и острому углу, откуда $DH_1 = BH_2$.

б) $\triangle CAH_2 = \triangle CAH$ по катету и острому углу, откуда $AH = AH_2$.

в) $\triangle CEH = \triangle CEH_1$ по катету и острому углу, откуда $EH_1 = EH$.

3) Докажем, что $BA + ED = AE.$

$$BA + ED = BH_2 + AH_2 + EH_1 - DH_1 = AH_2 + EH_1 + \left(BH_2 - DH_1\right) = AH + EH - 0 = AH + EH = AE.$$

4) $S\left(ABCDE\right) = \frac{1}{2}h \cdot \left(BA + AE + ED\right) = \frac{1}{2}h \cdot 2AE = 2 \cdot \frac{AE \cdot CH}{2} = 2S.$

3 способ.

1) По теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу,

$$\frac{S\left(\triangle CED\right)}{S\left(\triangle ACE\right)} = \frac{CE \cdot ED}{CE \cdot AE} = \frac{ED}{AE},\ S\left(\triangle CED\right) = \frac{ED}{AE} \cdot S.$$

Аналогично

$$\frac{S\left(\triangle BCA\right)}{S\left(\triangle ACE\right)} = \frac{AC \cdot BA}{AC \cdot AE} = \frac{BA}{AE},\ S\left(\triangle BCA\right) = \frac{BA}{AE} \cdot S.$$

Т.о. $S\left(ABCDE\right) = \frac{BA + ED}{AE} \cdot S + S.$

2) Доказать, что $BA + ED = AE.$ (см. 2 способ).

Ответ: 2S.

Задача 3

В кафе можно заказать неограниченное количество шашлыков, выбирая любые из трех видов: шашлык из курицы, из баранины или из говядины. Азамат хочет заказать 10 шашлыков. Найдите количество возможных разных заказов. Например, 3 шашлыка из курицы, 5 шашлыков из баранины, 2 шашлыка из говядины или все 10 шашлыков из баранины.

Решение

1 способ

1) Выбираем количество шашлыков из говядины (Г) в заказе.

Г = 10 или Г = 9 или Г = 8 или ... или Г = 1 или Г = 0.

2) Для каждого из этих случаев выбираем количество шашлыков из баранины (Б), остальные куриные (К).

Если Г = 10, то возможен только 1 способ: Б = 0 (соответственно К = 0).

Если Г = 9, возможны 2 способа: Б = 0 или Б = 1 (соответственно К = 1 или К = 0).

Если Г = 8, возможны 3 способа: Б = 0, Б = 1, Б = 2.

Если Г = 1, возможны 10 способов: Б = 0, Б = 1, ... , Б = 8, Б = 9.

Если Г = 0, возможны 11 способов: Б = 0, Б = 1, ... , Б = 9, Б = 10.

Согласно правилу суммы имеем

$$1+2+3+...+10+11=\frac{1+11}{2}\cdot 11=66.$$

Количество возможных разных заказов равно 66.

Ответ: 66

2 способ

	Шашлык из курицы	Шашлык из баранины	Шашлык из говядины	Заказ
1.	0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	000010001000
2.	0	0 0 0 0	0 0 0 0 0	010000100000
3.	0 0 0 0	0 0	0 0 0 0	000010010000
4.	0 0 0 0 0		0 0 0 0 0	000001100000
5.		0 0 0 0 0 0 0 0 0 0		100000000001

В вышеуказанной таблице содержится 5 примеров возможных заказов. Вертикальные линии в таблице отметим как «1», шашлыки как «0».

В первом заказе Азамат выбрал 4 шашлыка из курицы, 3 шашлыка из баранины и 3 шашлыка из говядины. Следовательно, заказ можно оформить как 000010001000.

В предпоследнем заказе Азамат выбрал 5 шашлыков из курицы и 5 шашлыков из говядины. Данный заказ можно оформить как 000001100000.

В последнем заказе Азамат выбрал только 10 шашлыков из баранины. Данный заказ можно оформить как 100000000001.

Каждый заказ можно оформить единственным способом как перестановку десяти "0" и двух «1». Один заказ отличается от другого положением двух разделительных линий.

Значит, достаточно посчитать количество перестановок из десяти «0» и двух «1».

Точнее, из 12 символов, среди которых 10 нулей и 2 единицы. Количество таких перестановок равно $\frac{12!}{2!\cdot 10!}=66$

1 возможное объяснение: Перестановка состоит из 12 символов. Нужно выбрать 2 символа, которые будут равны «1». Или из 12 мест выбрать 2 места, на которых поставить разделительные чёрточки. Число сочетаний из 12 по 2

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!},\ n=12,\ k=2,\ C_{12}^2=\frac{12!}{2!\cdot 10!}=66$$

Ответ: 66

2 возможное объяснение: Всего 12 символов. Из них десять равны «0», два равны «1». Следовательно, количество перестановок равно $C_{12}^{10} = \dfrac{12!}{10!\cdot 2} = 66$

Ответ: 66

3 возможное объяснение: Число перестановок из m элементов, из которых некоторые повторяются по $k_1,\ k_2,\ ...\ k_m$ вычисляется по формуле $\widetilde{P}_m = \dfrac{m!}{k_1!\cdot k_2!\cdot \ldots \cdot k_m!}$

В нашем случае $\widetilde{P}_{12} = \dfrac{12!}{10!\cdot 2!} = 66$

Ответ: 66

4 возможное объяснение:

Число сочетаний из m элементов по k с повторениями вычисляется по формуле
$\widetilde{C}_m^k = C_{m+k-1}^k$

В нашем случае $k = 10,\ m = 3,\ \widetilde{C}_3^{10} = C_{12}^{10} = C_{12}^{2} = 66$

Ответ: 66