Математика боюнча окуучулардын Республикалык олимпиадасынын райондук этабынын тапшырмаларын баалоо критерийлери (стендге илүү үчүн).

II тур

1-маселе

$y^2 - x^2 - 23y + x + 132 = 0$ теңдемесин канааттандырган x жана y жөнөкөй сандарынын бардык жуптарын тапкыла.

Чыгарылышы.

1) Бул теңдемени эки өзгөрмөсү бар эки сызыктуу теңдеменин жыйындысына алмаштырабыз.

Муну аткарыш үчүн бул теңдемени y өзгөрмөсүнө карата квадраттык теңдемедей кылып чыгарса болот.

$$y^2 - 23y - x^2 + x + 132 = 0$$
$$D = (-23)^2 - 4(x^2 + x + 132) = 529 + 4x^2 - 4x - 529 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$$

$$y = \frac{23 \pm (2x-1)}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x + 11, \\ y = 12 - x. \end{array} \right.$$

же

Теңдеменин сол бөлүгүн көбөйтүүчүлөргө ажыратып туруп,

$$y^2 - x^2 - 23y + x + 132 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(y-x)\cdot(y+x) - 12y - 11y + 12x - 11x + 11\cdot 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y-x)\cdot(y+x) - 12\cdot(y-x) - 11\cdot(y+x) + 11\cdot 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(y-x)\cdot(y+x-12) - 11\cdot(y+x-12) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y-x-11)\cdot(y+x-12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - x - 11 = 0, \\ y + x - 12 = 0. \end{array} \right.$$

$y = x + 11$ (1) жана $y = 12 - x$ (2) теңдемелерин жөнөкөй сандар менен чыгарабыз.

2) (1) теңдеменин чыгарылышы.

Эгерде x так сан болсо, анда $y - 11$ден чоң жуп сан, демек, y жөнөкөй сан болушу мүмкүн эмес.

Жалгыз жуп жөнөкөй сан 2ге барабар. Эгерде $x = 2$ болсо, анда $y = 13$ жөнөкөй сан.

Демек, (2;13) жуп сандары (1) теңдеменин жөнөкөй сандар менен берилген жалгыз чыгарылышы.

3) (2) теңдеменин чыгарылышы.

x жана y сандарынын суммасы 12 жуп санына барабар болгондуктан, бул сандар бирдей жуптукта. Бирок жөнөкөй сандардын арасында бир гана жуп сан бар, ошондуктан x жана y сандары жалаң гана жөнөкөй так сан боло алат, анткени $1 < x < 12$.

Бул шартты $x \in \{3; 5; 7; 11\}$ маанилери канааттандырат.

$x = 3$ шартында $y = 9$ жөнөкөй сан эмес,
$x = 5$ шартында $y = 7$ жөнөкөй сан,
$x = 7$ шартында $y = 5$ жөнөкөй сан,
$x = 11$ шартында $y = 1$ жөнөкөй сан эмес.

Демек, (2) теңдеменин жөнөкөй сандар менен берилген чыгарылышы (5;7) жана (7;5) жуп сандары болот.

$y^2 - x^2 - 23y + x + 132 = 0$ теңдемесине жөнөкөй сандардын төмөнкү жуптары (2;13), (5;7), (7;5) канааттандырат.

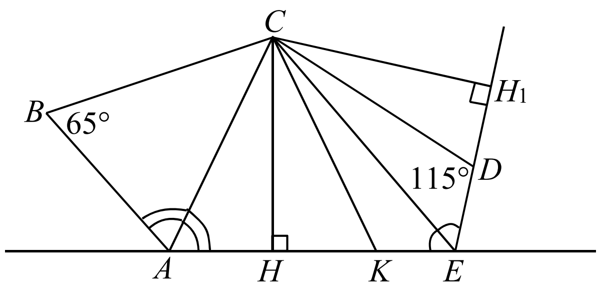
Жообу: (2;13), (5;7), (7;5).

2-маселе.

$ABCDE$ томпок беш бурчтугунда $\angle CBA = 65°$, $\angle CDE = 115°$, ал эми AC жана EC диагоналдары бул беш бурчтуктун BAE жана AED ички бурчтарынын биссектрисалары болуп эсептелет. ACE үч бурчтугунун аянты S ке барабар. $ABCDE$ беш бурчтугунун аянтын тапкыла.

Чыгарылышы.

1-ыкма



1) AC жана EC диагоналдары беш бурчтуктун BAE жана AED ички бурчтарынын биссектрисалары болгондуктан, CEA жана CAE бурчтары тар бурчтар. CH чокусу ACE үч бурчтугунун ичинде жатат жана $HE < AE$. ECD үч бурчтугунун CH_1 чокусу үч бурчтуктун сыртында жатат жана $ED < EH_1$.

EC – AED бурчунун биссектрисасы болгондуктан, $EH_1 = EH$.

$ED < EH_1 = EH < AE$.

Демек, $ED < AE$.

2) AE жагындагы K чекитин $EK = ED$ болгондой кылып алабыз.

CKE жана CDE үч бурчтуктарын карап чыгалы:

$\angle AED$ бурчунун биссектрисасы CE болгондуктан, $\angle CEK = \angle CED$.

Түзүлүшү боюнча $KE = DE$, CE – жалпы.

Демек, $\triangle CKE = \triangle CDE$, $\angle CKE = 115°$, $\angle CKA = 180° - 115° = 65°$ (жандаш катары)

Эскертүү.

Үч бурчтуктардын барабардыгын далилдеш үчүн жайылбаган бурчтун биссектрисасынын касиетин жана октук симметриянын касиеттерин колдонсо болот.

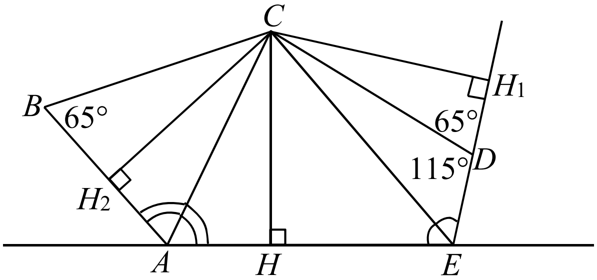
3) CAB жана CAK үч бурчтуктарын карап чыгалы.

Далилденген боюнча $\angle CKA = \angle CBA$.
Шарт боюнча $\angle CAK = \angle CAB$. $\angle$BAE бурчунун биссектрисасы AC,
CA жагы – жалпы.
Демек, жагы жана эки бурчу боюнча $\triangle CAB = \triangle CAK$.

4) Аянттын касиеттери боюнча:

$$S(\triangle CBA) = S(\triangle CAK),\ S(\triangle CDE) = S(\triangle CKE),$$
$$S(ABCDE) = S(\triangle CBA) + S(\triangle CAE) + S(\triangle CDE) = S(\triangle CAK) + S(\triangle CAE) + S(\triangle CKE) =$$
$$= \left(S(\triangle CAK) + S(\triangle CKE)\right) + S(\triangle CAE) = S(\triangle CAE) + S(\triangle CAE) = 2S.$$

2-ыкма.



1) BAE жана AED бурчтарынын AC жана EC биссектрисаларынын кесилиш чекити C болгондуктан, C чекити BA, AE жана ED түз сызыктарынан бирдей аралыктагы алыстыкта.

Эгерде C чекитинен бул түз сызыктарга чейинки аралык h ка барабар болсо, анда:

$$S(ABCDE)=S(\triangle CBA)+S(\triangle CAE)+S(\triangle CDE)=\frac{1}{2}\cdot BA\cdot CH_2+\frac{1}{2}\cdot AE\cdot CH+\frac{1}{2}\cdot ED\cdot CH_1=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot BA\cdot h+\frac{1}{2}\cdot AE\cdot h+\frac{1}{2}\cdot ED\cdot h=\frac{1}{2}h\cdot(BA+AE+ED).$$

2) а) катет жана тар бурч боюнча $\triangle CBH_2=\triangle CDH_1$, мындан $DH_1=BH_2$.

б) катет жана тар бурч боюнча $\triangle CAH_2=\triangle CAH$, мындан $AH=AH_2$.

в) катет жана тар бурч боюнча $\triangle CEH=\triangle CEH_1$, мындан $EH_1=EH$.

3) $BA+ED=AE$ экендигин далилдейбиз.

$$BA+ED=BH_2+AH_2+EH_1-DH_1=AH_2+EH_1+(BH_2-DH_1)=AH+EH-0=AH+EH=AE.$$

4) $S(ABCDE)=\frac{1}{2}h\cdot(BA+AE+ED)=\frac{1}{2}h\cdot 2AE=2\cdot\frac{AE\cdot CH}{2}=2S.$

3-ыкма.

1) Бирдей бурчтары бар үч бурчтуктун аянттарынын катыштары жөнүндө теорема боюнча:

$$\frac{S(\triangle CED)}{S(\triangle ACE)}=\frac{CE\cdot ED}{CE\cdot AE}=\frac{ED}{AE},\ S(\triangle CED)=\frac{ED}{AE}\cdot S.$$

Ошондой эле,

$$\frac{S(\triangle BCA)}{S(\triangle ACE)}=\frac{AC\cdot BA}{AC\cdot AE}=\frac{BA}{AE},\ S(\triangle BCA)=\frac{BA}{AE}\cdot S.$$

Демек, $S(ABCDE)=\frac{BA+ED}{AE}\cdot S+S.$

2) $BA+ED=AE$ экендигин далилдеш керек (2-ыкманы кара).

Жообу: 2S.

3-маселе

Кафеде үч түрдүү шашлык жасалат: тооктун этинен, койдун этинен жана уйдун этинен. Бул үч түрдөн каалаган сандагы шашлык заказ кылса болот. Азамат 10 шашлык алайын деп жатат. Ар кандай түрдөгү мүмкүн болгон заказдардын санын тапкыла. Мисалы, тооктун этинен жасалган 3 шашлык, койдун этинен жасалган 5 шашлык, уйдун этинен жасалган 2 шашлык же бардык 10 шашлык койдун этинен жасалган.

Чыгарылышы.

1-ыкма

1) Заказдагы уйдун этинен жасалган (У) шашлыктардын санын тандайбыз.

У = 10 же У = 9 же У = 8 же ... же У= 1 же У = 0.

2) Ар бир жогорудагы учур үчүн койдун этинен (К) жасалган шашлыктардын санын тандайбыз, калгандары тооктун этинен (Т) болот.

Эгерде У = 10 болсо, анда болгону бир гана ыкма мүмкүн: К = 0 (демек, Т = 0).

Эгерде У = 9 болсо, анда 2 ыкма мүмкүн: К = 0 же К = 1 (демек, Т = 1 же Т = 0).

Эгерде У = 8 болсо, анда 3 ыкма мүмкүн: К = 0, К = 1, К = 2.

Эгерде У = 1 болсо, анда 10 ыкма мүмкүн: К = 0, К = 1, ... , К = 8, К = 9.

Эгерде У = 0 болсо, анда 11 ыкма мүмкүн: К = 0, К = 1, ... , К = 9, К = 10.

Сумманын эрежесине ылайык, төмөнкүнү алабыз:

$$1+2+3+...+10+11=\frac{1+11}{2}\cdot 11=66.$$

Мүмкүн болгон ар түрдүү заказдардын саны 66га барабар.

Жообу: 66

2-ыкма.

	Тооктун этинен жасалган шашлык	Койдун этинен жасалган шашлык	Уйдун этинен жасалган шашлык	Заказ
1.	0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	000010001000
2.	0	0 0 0 0	0 0 0 0 0	010000100000
3.	0 0 0 0	0 0	0 0 0 0	000010010000
4.	0 0 0 0 0		0 0 0 0 0	000001100000
5.		0 0 0 0 0 0 0 0 0 0		100000000001

Жогорудагы таблицада мүмкүн болгон заказдардын 5 мисалы берилген. Таблицадагы вертикалдуу сызыктарды «1», шашлыктарды «0» деп белгилейбиз.

Биринчи заказда Азамат тооктун этинен жасалган 4 шашлык, койдун этинен жасалган 3 шашлык жана уйдун этинен жасалган 3 шашлык тандап алган. Демек, заказды 000010001000 деп белгилеп койсок болот.

Акыркы заказдын алдындагы заказда Азамат тооктун этинен жасалган 5 шашлык жана уйдун этинен жасалган 5 шашлык тандап алды. Бул заказды 000001100000 деп белгилеп койсок болот.

Акыркы заказда Азамат койдун этинен гана жасалган 10 шашлыкты тандап алды. Бул заказды 100000000001 деп белгилеп койсок болот.

Ар бир заказды он «0»ду жана эки «1»ди бир гана жолу ордун өзгөртүп белгилеп жазса болот. Бир заказ башка заказдан бөлүп турган эки сызыктын орду менен гана айырмаланып турат.

Демек, он «0» жана эки «1»дин орун которуусунун санын гана эсептеп чыгуу жетиштүү болот.

Тагыраак айтканда, арасында 10 нөл жана 2 бир бар 12 символдон гана. Мындай орун которуулардын саны $\frac{12!}{2!\cdot 10!}=66$ га барабар.

1-мүмкүн болгон түшүндүрүү: Орун которуу 12 символдон турат. «1»ге барабар болгон 2 символду тандап алуу керек. Же 12 орундан 2 орунду тандап алып, аларга бөлүү чиймелерин коюп коюу керек. Айкалыштыруулардын саны 12 орундан 2ден болот.

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!},\ n=12,\ k=2,\ C_{12}^2=\frac{12!}{2!\cdot 10!}=66$$

Жообу: 66

2-мүмкүн болгон түшүндүрүү: Бардыгы 12 символ. Алардын ону «0»го, экөө «1»ге барабар. Демек, орун которуулардын саны $C_{12}^{10}=\frac{12!}{10!\cdot 2}=66$ га барабар.

Жообу: 66

3-мүмкүн болгон түшүндүрүү: Айрымдары $k_1,\ k_2,\ \dots\ k_m$ болуп кайталанган m элементтердин орун которууларынын саны $\widetilde{P}_m=\frac{m!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$ формуласы менен эсептелет.

Биздин учур боюнча $\widetilde{P}_{12}=\frac{12!}{10!\cdot 2!}=66$

Жообу: 66

4-мүмкүн болгон түшүндүрүү:

m элементтеринин k га чейин кайталанган айкалыштардын саны $\widetilde{C}_m^k=C_{m+k-1}^k$ формуласы менен эсептелет.

Биздин учур боюнча $k=10,\ m=3,\ \widetilde{C}_3^{10}=C_{12}^{10}=C_{12}^2=66$.

Жообу: 66