Критерии оценивания районного этапа Республиканской олимпиады школьников по математике для жюри.

II тур

Задача 1

Найдите все пары простых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $y^2 - x^2 - 23y + x + 132 = 0.$

Решение

1) Заменим данное уравнение совокупностью двух линейных уравнений с двумя переменными.

Это можно сделать, решив данное уравнение как квадратное относительно переменной y

$$y^2 - 23y - x^2 + x + 132 = 0$$
$$D = (-23)^2 - 4(x^2 + x + 132) = 529 + 4x^2 - 4x - 529 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$$

$$y = \frac{23 \pm (2x-1)}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x + 11, \\ y = 12 - x. \end{array}\right.$$

или

Разложив левую часть уравнения на множители:

$$y^2 - x^2 - 23y + x + 132 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(y-x)\cdot(y+x) - 12y - 11y + 12x - 11x + 11\cdot 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y-x)\cdot(y+x) - 12\cdot(y-x) - 11\cdot(y+x) + 11\cdot 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(y-x)\cdot(y+x-12) - 11\cdot(y+x-12) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y-x-11)\cdot(y+x-12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - x - 11 = 0, \\ y + x - 12 = 0. \end{array}\right.$$

Решим уравнения $y = x + 11\ (1)$ и $y = 12 - x\ (2)$ в простых числах.

2) Решение уравнения (1).

Если $x -$ нечётное, то $y -$ чётное число, большее 11, тогда y не может быть простым числом.

Единственное чётное простое число равно 2. Если $x = 2,$ то $y = 13 -$ простое число.

Т.о. пара чисел (2;13) – единственное решение уравнения (1) в простых числах.

3) Решение уравнения (2).

Т.к. сумма чисел x и y равна чётному числу 12, то эти числа одинаковой чётности. Но среди простых чисел только одно чётное число, поэтому x и y могут быть только нечётными простыми числами, причём $1 < x < 12$.

Этому условию удовлетворяют значения $x \in \{3; 5; 7; 11\}$.

При $x = 3$ $y = 9$ – не является простым числом,
при $x = 5$ $y = 7$ – простое число,
при $x = 7$ $y = 5$ – простое число,
при $x = 11$ $y = 1$ – не является простым числом.

Т.о. решением уравнения (2) в простых числах являются пары чисел (5;7) и (7;5).

Уравнению $y^2 - x^2 - 23y + x + 132 = 0$ удовлетворяют следующие пары простых чисел: (2;13), (5;7), (7;5).

Ответ: (2;13), (5;7), (7;5).

Критерии оценивания

№	Этапы решения	Количество баллов
1.	Осуществлён переход от уравнения $y^2 - x^2 - 23y + x + 132 = 0$ к равносильной совокупности двух уравнений $y = x + 11(1)$ и $y = 12 - x(2)$	3 балла
2.	Решено в простых числах уравнение (1)	2 балла
3.	Решено в простых числах уравнение (2)	2 балла
Всего		7 баллов

Замечания.

1. За первый этап решения ставится
- 3 балла, если осуществлён переход к совокупности уравнений $y = x + 11(1)$ и $y = 12 - x(2)$.

При этом все преобразования выполнены достаточно подробно.
- 2 балла, если получены верные линейные уравнения, но преобразования выполнены недостаточно подробно.
- 1 балл, если намечен верный путь решения, но в преобразованиях допущена ошибка.

2. За второй этап решения ставится
- 2 балла, если получено решение (2;13) и доказано, что других решений в простых числах уравнение (1) не имеет.
- 1 балл, если получено решение (2;13), но его единственность либо не доказана, либо в доказательстве есть логические ошибки.

3. За третий этап решения ставится

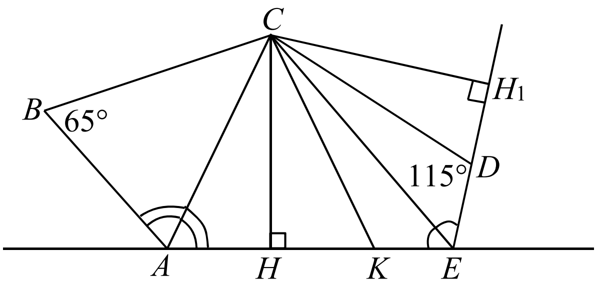
- 2 балла, если получены все решения уравнения (2) и доказано, что других решений в простых числах уравнение (2) не имеет.
- 1 балл, если уравнение (2) правильно решено в простых числах, но рассуждения недостаточно обоснованы.
- 0 баллов, если найдены не все решения уравнения (2) или получены лишние решения, например, (1;11), (11;1) и т.п.

Задача 2

В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle CBA = 65°$, $\angle CDE = 115°$, а диагонали AC и EC являются биссектрисами внутренних углов BAE и AED этого пятиугольника. Площадь треугольника ACE равна S. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

Решение

1 способ



1) Т.к. диагонали AC и EC являются биссектрисами внутренних углов BAE и AED пятиугольника, то углы CEA и CAE – острые. Высота CH лежит внутри треугольника ACE и $HE < AE$. Высота CH_1 треугольника ECD лежит вне треугольника и $ED < EH_1$.

Поскольку EC – биссектриса угла AED, то $EH_1 = EH$.

$ED < EH_1 = EH < AE$.

Значит, $ED < AE$.

2) Возьмём на стороне AE точку K так, что $EK = ED$.

Рассмотрим треугольники CKE и CDE:

$\angle CEK = \angle CED$, т.к. CE – биссектриса $\angle AED$, $KE = DE$ по построению, CE – общая.

Значит, $\triangle CKE = \triangle CDE$, $\angle CKE = 115°$, $\angle CKA = 180° - 115° = 65°$(как смежный).

Замечание.

Для доказательства равенства треугольников можно воспользоваться свойством биссектрисы неразвёрнутого угла и свойствами осевой симметрии.

3) Рассмотрим треугольники CAB и CAK:

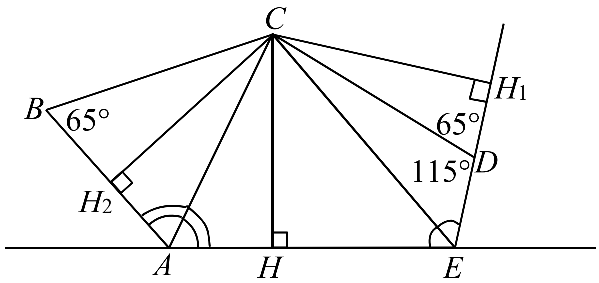
$\angle CKA = \angle CBA$ по доказанному,
$\angle CAK = \angle CAB$ по условию (AC – биссектриса $\angle$BAE), сторона CA общая.

Значит, $\triangle CAB = \triangle CAK$ по стороне и двум углам.

4) По свойствам площади

$$S(\triangle CBA) = S(\triangle CAK),\ S(\triangle CDE) = S(\triangle CKE),$$
$$S(ABCDE) = S(\triangle CBA) + S(\triangle CAE) + S(\triangle CDE) = S(\triangle CAK) + S(\triangle CAE) + S(\triangle CKE) =$$
$$= \left(S(\triangle CAK) + S(\triangle CKE)\right) + S(\triangle CAE) = S(\triangle CAE) + S(\triangle CAE) = 2S.$$

2 способ.



1) Т.к. C – точка пересечения биссектрис AC и EC углов BAE и AED, то точка C равноудалена от прямых BA, AE и ED.

Если расстояние от точки C до этих прямых равно h. Тогда

$$S(ABCDE) = S(\triangle CBA) + S(\triangle CAE) + S(\triangle CDE) = \frac{1}{2}\cdot BA\cdot CH_2 + \frac{1}{2}\cdot AE\cdot CH + \frac{1}{2}\cdot ED\cdot CH_1 =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot BA\cdot h + \frac{1}{2}\cdot AE\cdot h + \frac{1}{2}\cdot ED\cdot h = \frac{1}{2}h\cdot(BA + AE + ED).$$

2) а) $\triangle CBH_2 = \triangle CDH_1$ по катету и острому углу, откуда $DH_1 = BH_2$.
б) $\triangle CAH_2 = \triangle CAH$ по катету и острому углу, откуда $AH = AH_2$.
в) $\triangle CEH = \triangle CEH_1$ по катету и острому углу, откуда $EH_1 = EH$.

3) Докажем, что $BA + ED = AE$.

$$BA + ED = BH_2 + AH_2 + EH_1 - DH_1 = AH_2 + EH_1 + (BH_2 - DH_1) = AH + EH - 0 = AH + EH = AE.$$

4) $S(ABCDE) = \frac{1}{2}h\cdot(BA + AE + ED) = \frac{1}{2}h\cdot 2AE = 2\cdot\frac{AE\cdot CH}{2} = 2S.$

3 способ.

1) По теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу,

$$\frac{S(\triangle CED)}{S(\triangle ACE)} = \frac{CE \cdot ED}{CE \cdot AE} = \frac{ED}{AE},\ S(\triangle CED) = \frac{ED}{AE} \cdot S.$$

Аналогично

$$\frac{S(\triangle BCA)}{S(\triangle ACE)} = \frac{AC \cdot BA}{AC \cdot AE} = \frac{BA}{AE},\ S(\triangle BCA) = \frac{BA}{AE} \cdot S.$$

Т.о. $S(ABCDE) = \frac{BA + ED}{AE} \cdot S + S.$

2) Доказать, что $BA + ED = AE.$ (см. 2 способ).

Ответ: 2S.

Критерии оценивания

№	Этапы решения	Количество баллов
1.	На основании анализа условия задачи выполнен чертёж.	1 балл
2.	Приведено полное решение задачи.	6 баллов
Всего		7 баллов

Замечания.

1) При проверке правильности чертежа (первый этап) следует обратить внимание на то, что $AB < AE,\ DE < AE.$

За первый этап ставится

- 1 балл, если чертёж выполнен правильно.

2) За второй этап решения ставится

- 6 баллов в том случае, если описаны все выполненные дополнительные построения, чётко сформулированы и доказаны все вспомогательные утверждения, решение изложено последовательно, получен правильный ответ;
- 5 баллов, если получен правильный ответ, но дополнительные построения не описаны и/или есть незначительные пробелы в обосновании вспомогательных утверждений;
- 4 балла, если решение изложено последовательно, доведено до конца, но значительная часть вспомогательных утверждений не обоснована;

- 3 балла, если выбран верный ход решения, но решение не доведено до конца или были допущены 1-2 ошибки, приведшие к неправильному ответу;
- 2 балла, если на основании анализа условия задачи сделаны правильные утверждения, не приводящие к ответу на заданный вопрос;
- 1 балл, если некоторые из вспомогательных утверждений, приведённых участником, неверные, из-за чего получен неправильный ответ или ответ не получен;
- 0 баллов, если решение неверное или решение отсутствует.

Задача 3

В кафе можно заказать неограниченное количество шашлыков, выбирая любые из трех видов: шашлык из курицы, из баранины или из говядины. Азамат хочет заказать 10 шашлыков. Найдите количество возможных разных заказов. Например, 3 шашлыка из курицы, 5 шашлыков из баранины, 2 шашлыка из говядины или все 10 шашлыков из баранины.

Решение

1 способ

1) Выбираем количество шашлыков из говядины (Г) в заказе.

Г = 10 или Г = 9 или Г = 8 или ... или Г = 1 или Г = 0.

2) Для каждого из этих случаев выбираем количество шашлыков из баранины (Б), остальные куриные (К).

Если Г = 10, то возможен только 1 способ: Б = 0 (соответственно К = 0).

Если Г = 9, возможны 2 способа: Б = 0 или Б = 1 (соответственно К = 1 или К = 0).

Если Г = 8, возможны 3 способа: Б = 0, Б = 1, Б = 2.

Если Г = 1, возможны 10 способов: Б = 0, Б = 1, ... , Б = 8, Б = 9.

Если Г = 0, возможны 11 способов: Б = 0, Б = 1, ... , Б = 9, Б = 10.

Согласно правилу суммы имеем

$$1+2+3+...+10+11=\frac{1+11}{2}\cdot 11=66.$$

Количество возможных разных заказов равно 66.

Ответ: 66

2 способ

	Шашлык из курицы	Шашлык из баранины	Шашлык из говядины	Заказ
1.	0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	000010001000
2.	0	0 0 0 0	0 0 0 0 0	010000100000
3.	0 0 0 0	0 0	0 0 0 0	000010010000
4.	0 0 0 0 0		0 0 0 0 0	000001100000
5.		0 0 0 0 0 0 0 0 0 0		100000000001

В вышеуказанной таблице содержится 5 примеров возможных заказов. Вертикальные линии в таблице отметим как «1», шашлыки как «0».

В первом заказе Азамат выбрал 4 шашлыка из курицы, 3 шашлыка из баранины и 3 шашлыка из говядины. Следовательно, заказ можно оформить как 000010001000.

В предпоследнем заказе Азамат выбрал 5 шашлыков из курицы и 5 шашлыков из говядины. Данный заказ можно оформить как 000001100000.

В последнем заказе Азамат выбрал только 10 шашлыков из баранины. Данный заказ можно оформить как 100000000001.

Каждый заказ можно оформить единственным способом как перестановку десяти "0" и двух «1». Один заказ отличается от другого положением двух разделительных линий.

Значит, достаточно посчитать количество перестановок из десяти «0» и двух «1».

Точнее, из 12 символов, среди которых 10 нулей и 2 единицы. Количество таких перестановок равно $\frac{12!}{2!\cdot 10!}=66$

1 возможное объяснение: Перестановка состоит из 12 символов. Нужно выбрать 2 символа, которые будут равны «1». Или из 12 мест выбрать 2 места, на которых поставить разделительные чёрточки. Число сочетаний из 12 по 2

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!},\ n=12,\ k=2,\ C_{12}^2=\frac{12!}{2!\cdot 10!}=66$$

Ответ: 66

2 возможное объяснение: Всего 12 символов. Из них десять равны «0», два равны «1». Следовательно, количество перестановок равно $C_{12}^{10}=\frac{12!}{10!\cdot 2}=66$

Ответ: 66

3 возможное объяснение: Число перестановок из m элементов, из которых некоторые повторяются по $k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_m$ вычисляется по формуле $\widetilde{P}_m = \dfrac{m!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$

В нашем случае $\widetilde{P}_{12} = \dfrac{12!}{10!\cdot 2!} = 66$

Ответ: 66

4 возможное объяснение:

Число сочетаний из m элементов по k с повторениями вычисляется по формуле $\widetilde{C}_m^k = C_{m+k-1}^k$

В нашем случае $k = 10,\ m = 3,\ \widetilde{C}_3^{10} = C_{12}^{10} = C_{12}^2 = 66$

Ответ: 66

Критерии оценивания

№№ п./п.	Этапы решения	Количество баллов
1.	На основании анализа условия задачи сделан вывод о том, что нужно искать комбинации из 12 элементов.	1 балл
2.	Приведено полное решение задачи	6 баллов
Всего		7 баллов

Замечания.

1) За первый этап ставится

- 1 балл, если выполнен верно анализ условия задачи, записано пояснение.

2) За второй этап ставится

- 6 баллов, если приведено полное обоснование выбранных правила или формулы комбинаторики, решение изложено последовательно, получен правильный ответ;
- 5 баллов, если получен правильный ответ, если присутствуют незначительные пробелы в обоснованиях, выбранных правила или формулы;
- 4 балла, если решение изложено последовательно, доведено до конца, но обоснования изложены недостаточно четко;
- 3 балла, если выбран верный ход решения, но решение не доведено до конца или были допущены 1-2 ошибки, приведшие к неправильному ответу;
- 2 балла, если на основании анализа условия задачи сделаны некоторые правильные утверждения, но не приводящие к ответу на заданный вопрос;
- 1 балл, если некоторые из утверждений, приведенных участником, неверные, из-за чего получен неправильный ответ или ответ не получен;

- 0 баллов, если решение неверное или решение отсутствует.

3) За любое верное решение другим способом количество баллов баллов распределяется аналогично вышеприведенной схеме.

4) Решение может быть прямым перебором, длинное. Но оно засчитывается верным. При полном последовательном пояснении решения и получении правильного ответа, ставится полное количество баллов – 7.

Количество баллов снимается аналогично указанным в п. 2 указаниям за неполное пояснение, за допущенные ошибки, за неполучение верного ответа.