Математика боюнча окуучулардын Республикалык олимпиадасынын райондук этабынын тапшырмаларын баалоо критерийлери (калыстар тобу үчүн).

II тур

1-маселе

$y^2 - x^2 - 23y + x + 132 = 0$ теңдемесин канааттандырган x жана y жөнөкөй сандарынын бардык жуптарын тапкыла.

Чыгарылышы.

1) Бул теңдемени эки өзгөрмөсү бар эки сызыктуу теңдеменин жыйындысына алмаштырабыз.

Муну аткарыш үчүн бул теңдемени y өзгөрмөсүнө карата квадраттык теңдемедей кылып чыгарса болот.

$$y^2 - 23y - x^2 + x + 132 = 0$$

$$D = (-23)^2 - 4(x^2 + x + 132) = 529 + 4x^2 - 4x - 529 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$$

$$y = \frac{23 \pm (2x-1)}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x + 11, \\ y = 12 - x. \end{array}\right.$$

же

Теңдеменин сол бөлүгүн көбөйтүүчүлөргө ажыратып туруп,

$$y^2 - x^2 - 23y + x + 132 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y-x)\cdot(y+x) - 12y - 11y + 12x - 11x + 11\cdot 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\cdot(y+x) - 12\cdot(y-x) - 11\cdot(y+x) + 11\cdot 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y-x)\cdot(y+x-12) - 11\cdot(y+x-12) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-x-11)\cdot(y+x-12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - x - 11 = 0, \\ y + x - 12 = 0. \end{array}\right.$$

$y = x + 11$ (1) жана $y = 12 - x$ (2) теңдемелерин жөнөкөй сандар менен чыгарабыз.

2) (1) теңдеменин чыгарылышы

Эгерде x так сан болсо, анда у – 11ден чоң жуп сан, демек, y жөнөкөй сан болушу мүмкүн эмес.

Жалгыз жуп жөнөкөй сан 2ге барабар. Эгерде $x = 2$ болсо, анда $y = 13$ жөнөкөй сан.

Демек, (2;13) жуп сандары (1) теңдеменин жөнөкөй сандар менен берилген жалгыз чыгарылышы

3) (2) теңдеменин чыгарылышы.

x жана y сандарынын суммасы 12 жуп санына барабар болгондуктан, бул сандар бирдей жуптукта. Бирок жөнөкөй сандардын арасында бир гана жуп сан бар, ошондуктан x жана y сандары жалаң гана жөнөкөй так сандар боло алат, анткени $1 < x < 12$.

Бул шартты $x \in \{3; 5; 7; 11\}$ маанилери канааттандырат.

$x = 3$ шартында $y = 9$ жөнөкөй сан эмес,
$x = 5$ шартында $y = 7$ жөнөкөй сан,
$x = 7$ шартында $y = 5$ жөнөкөй сан,
$x = 11$ шартында $y = 1$ жөнөкөй сан эмес.

Демек, (2) теңдеменин жөнөкөй сандар менен берилген чыгарылышы (5;7) жана (7;5) жуп сандары болот.

$y^2 - x^2 - 23y + x + 132 = 0$ теңдемесине жөнөкөй сандардын төмөнкү жуптары (2;13), (5;7), (7;5) канааттандырат.

Жообу: (2;13), (5;7), (7;5).

Баалоо критерийлери:

№	Чыгарылыш этаптары	Упайлардын саны
1.	$y^2 - x^2 - 23y + x + 132 = 0$ теңдемесине барабар болгон $y = x + 11(1)$ жана $y = 12 - x(2)$ эки теңдемесинин жыйындысына которуу жүргүзүлгөн.	3 упай
2.	(1) теңдемеси жөнөкөй сандар менен чыгарылган	2 упай
3.	(2) теңдемеси жөнөкөй сандар менен чыгарылган	2 упай
Бардыгы		7 упай

Эскертүүлөр.

1. Чыгарылыштын биринчи этабы үчүн төмөндөгүдөй упайлар берилет:
- Эгерде $y = x + 11(1)$ жана $y = 12 - x(2)$ теңдемелеринин жыйындысына которуу жасалса, анда 3упай берилет.

Ошону менен бирге бардык которуулар майда-чүйдөсүнө чейин аткарылган.
- Эгерде сызыктуу теңдемелер туура алынса, бирок өзгөрүүлөр толугу менен аткарылбаса, анда 2 упай берилет.
- Эгерде чыгарылыштын туура жолу коюлса, бирок өзгөрүүлөрдө ката кетсе, анда 1 упай берилет.

2. Чыгарылыштын экинчи этабы үчүн төмөндөгүдөй упайлар берилет:
- Эгерде (2;13) чыгарылышы алынса жана (1) теңдемесинин жөнөкөй сандар менен берилген башка чыгарылыштары жок экендиги далилденсе, анда 2 упай берилет.
- Эгерде (2;13) чыгарылышы алынса, бирок анын жалгыз экендиги же далилденбесе, же далил келтирүүдө логикалык каталар бар болсо, анда 1 упай берилет.

3. Чыгарылыштын үчүнчү этабына төмөндөгүдөй упайлар берилет:

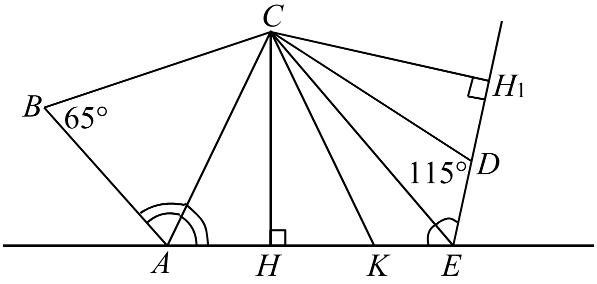
- Эгерде (2) теңдеменин бардык чыгарылыштары алынса жана (2) теңдеменин жөнөкөй сандар менен берилген башка чыгарылыштары жок экендиги далилденсе, анда 2 упай берилет.
- Эгерде (2) теңдеме жөнөкөй сандар менен туура чыгарылса, бирок ой жүгүртүүлөр жетиштүү негизделбесе, анда 1 упай берилет.
- Эгерде (2) теңдеменин бардык чыгарылыштары табылбаса же башка ашык чыгарылыштары алынса, мисалы: (1;11), (11;1) ж.б.у.с., анда 0 упай берилет.

2-маселе.

$ABCDE$ беш бурчтугунда $\angle CBA = 65°$, $\angle CDE = 115°$, ал эми AC жана EC диагоналдары бул беш бурчтуктун BAE жана AED ички бурчтарынын биссектрисасы болуп эсептелет. ACE үч бурчтугунун аянты S ке барабар. $ABCDE$ беш бурчтугунун аянтын тапкыла.

Чыгарылышы.

1-ыкма



1) AC жана EC диагоналдары беш бурчтуктун BAE жана AED ички бурчтарынын биссектрисалары болгондуктан, CEA жана CAE бурчтары – тар бурчтар. CH чокусу ACE үч бурчтугунун ичинде жатат жана $HE < AE.$ ECD үч бурчтугунун CH_1 чокусу үч бурчтуктун сыртында жатат жана $ED < EH_1$.

$EC - AED$ бурчунун биссектрисасы болгондуктан, $EH_1 = EH.$

$ED < EH_1 = EH < AE.$

Демек, $ED < AE.$

2) AE жагындагы K чекитин $EK = ED$ болгондой кылып алабыз.

CKE жана CDE үч бурчтуктарын карап чыгалы:

$\angle AED$ бурчунун биссектрисасы CE болгондуктан, $\angle CEK = \angle CED$.

Түзүлүшү боюнча $KE = DE$, $CE-$ жалпы.

Демек, $\triangle CKE = \triangle CDE$, $\angle CKE = 115°$, $\angle CKA = 180° - 115° = 65°$ (жандаш катары).

Эскертүү.

Үч бурчтуктардын барабардыгын далилдеш үчүн жайылбаган бурчтун биссектрисасынын касиетин жана октук симметриянын касиеттерин колдонсо болот.

3) CAB жана CAK үч бурчтуктарын карап чыгалы:

Далилденген боюнча $\angle CKA = \angle CBA.$ Шарт боюнча $\angle CAK = \angle CAB.$

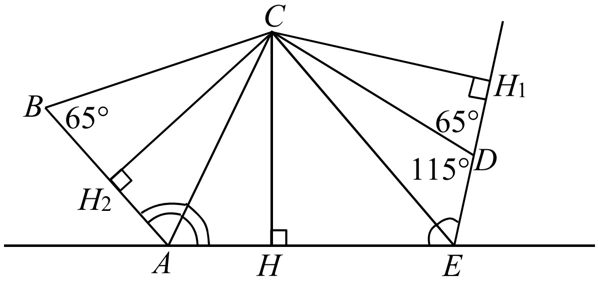
$\angle$BAE бурчунун биссектрисасы $AC,$ CA жагы – жалпы.

Демек, жагы жана эки бурчу боюнча $\triangle CAB = \triangle CAK.$

4) Аянттын касиеттери боюнча:

$$S(\triangle CBA) = S(\triangle CAK),\ S(\triangle CDE) = S(\triangle CKE),$$
$$S(ABCDE) = S(\triangle CBA) + S(\triangle CAE) + S(\triangle CDE) = S(\triangle CAK) + S(\triangle CAE) + S(\triangle CKE) =$$
$$= (S(\triangle CAK) + S(\triangle CKE)) + S(\triangle CAE) = S(\triangle CAE) + S(\triangle CAE) = 2S.$$

2-ыкма.



1) BAE жана AED бурчтарынын AC жана EC биссектрисаларынын кесилиш чекити C болгондуктан, C чекити BA, AE жана ED түз сызыктарынан бирдей аралыктагы алыстыкта.

Эгерде C чекитинен бул түз сызыктарга чейинки аралык hка барабар болсо, анда:

$$S(ABCDE) = S(\triangle CBA) + S(\triangle CAE) + S(\triangle CDE) = \frac{1}{2}\cdot BA\cdot CH_2 + \frac{1}{2}\cdot AE\cdot CH + \frac{1}{2}\cdot ED\cdot CH_1 =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot BA\cdot h + \frac{1}{2}\cdot AE\cdot h + \frac{1}{2}\cdot ED\cdot h = \frac{1}{2}h\cdot(BA + AE + ED).$$

2) а) катет жана тар бурч боюнча $\triangle CBH_2 = \triangle CDH_1$, мындан $DH_1 = BH_2.$

б) катет жана тар бурч боюнча $\triangle CAH_2 = \triangle CAH$, мындан $AH = AH_2.$

в) катет жана тар бурч боюнча $\triangle CEH = \triangle CEH_1$, мындан $EH_1 = EH.$

3) $BA + ED = AE$ экендигин далилдейбиз:

$$BA + ED = BH_2 + AH_2 + EH_1 - DH_1 = AH_2 + EH_1 + (BH_2 - DH_1) = AH + EH - 0 = AH + EH = AE.$$

4) $S\left(ABCDE\right)=\frac{1}{2}h\cdot\left(BA+AE+ED\right)=\frac{1}{2}h\cdot 2AE=2\cdot\frac{AE\cdot CH}{2}=2S.$

3-ыкма.

1) Бирдей бурчтары бар үч бурчтуктун аянттарынын катыштары жөнүндө теорема боюнча:

$$\frac{S\left(\triangle CED\right)}{S\left(\triangle ACE\right)}=\frac{CE\cdot ED}{CE\cdot AE}=\frac{ED}{AE},\ S\left(\triangle CED\right)=\frac{ED}{AE}\cdot S.$$

Ошондой эле,

$$\frac{S\left(\triangle BCA\right)}{S\left(\triangle ACE\right)}=\frac{AC\cdot BA}{AC\cdot AE}=\frac{BA}{AE},\ S\left(\triangle BCA\right)=\frac{BA}{AE}\cdot S.$$

Демек, $S\left(ABCDE\right)=\frac{BA+ED}{AE}\cdot S+S.$

2) $BA+ED=AE$ экендигин далилдеш керек (2-ыкманы кара).

Жообу: 2S.

Баалоо критерийлери:

№	Чыгарылыш этаптары	Упайлардын саны
1.	Маселенин шартын талдоонун негизинде чийме чийилген.	1 упай
2.	Маселенин толук чыгарылышы берилген.	6 упай
Бардыгы		7 упай

Эскертүүлөр.

1) Чийменин туура чийилгендигин текшерүүдө (биринчи этап) $AB < AE,\ DE < AE$ болгондугуна көңүл буруу керек.

Биринчи этап үчүн төмөндөгүдөй упайлар берилет:

- эгерде чийме туура чийилсе, анда 1 упай берилет.

2) Чыгарылыштын экинчи этабына төмөндөгүдөй упайлар берилет:

- Эгерде бардык кошумча чиймелер түшүндүрүлсө (сыпатталса), бардык жардамчы ырастоолор так жазылса жана далилденсе, чыгарылышы ырааттуу жазылса, туура жообу алынган болсо, анда 6 упай берилет;
- Эгерде туура жооп алынса, бирок кошумча чиймелер берилбесе (сыпатталбаса) же/жана жардамчы ырастоолорду негиздөөдө өтө маанилүү эмес бош жерлер бар болсо, анда 5 упай берилет;

- Эгерде чыгарылышы ырааттуу берилсе, аягына чейин чыкса, бирок кошумча жардам берүүчү ырастоолордун маанилүү бөлүгү негизделбесе, анда 4 упай берилет;
- Эгерде чыгарылыштын туура жолу тандалса, бирок чыгарылыш аягына чыкпаса же туура эмес жоопко алып келген 1-2 ката кетсе, анда 3 упай берилет;
- Эгерде маселенин шартын талдоонун негизинде берилген суроонун жообуна алып келбеген туура ырастоолор жазылса, анда 2 упай берилет;
- Эгерде катышуучу берген айрым кошумча ырастоолор туура эмес жоопко алып келсе же туура жооп алынбаса, анда 1 упай берилет;
- Эгерде чыгарылышы туура эмес болсо же чыгарылышы жок болсо, анда 0 упай берилет.

3-маселе.

Кафеде үч түрдүү шашлык жасалат: тооктун этинен, койдун этинен жана уйдун этинен. Бул үч түрдөн каалаган сандагы шашлык заказ кылса болот. Азамат 10 шашлык алайын деп жатат. Ар кандай түрдөгү мүмкүн болгон заказдардын санын тапкыла. Мисалы, тооктун этинен жасалган 3 шашлык, койдун этинен жасалган 5 шашлык, уйдун этинен жасалган 2 шашлык же бардыгы койдун этинен жасалган 10 шашлык.

Чыгарылышы.

1-ыкма

1) Заказдагы уйдун этинен жасалган (У) шашлыктардын санын тандайбыз.

У = 10 же У = 9 же У = 8 же ... же У= 1 же У = 0.

Ар бир жогорудагы учур үчүн койдун этинен (К) жасалган шашлыктардын санын тандайбыз, калгандары тооктун этинен (Т) болот.

Эгерде У = 10 болсо, анда болгону бир гана ыкма мүмкүн: К = 0 (демек, Т = 0).

Эгерде У = 9 болсо, анда 2 ыкма мүмкүн: К = 0 же К = 1 (демек, Т = 1 же Т = 0).

Эгерде У = 8 болсо, анда 3 ыкма мүмкүн: К = 0, К = 1, К = 2.

Эгерде У = 1 болсо, анда 10 ыкма мүмкүн: К = 0, К = 1, ... , К = 8, К = 9.

Эгерде У = 0 болсо, анда 11 ыкма мүмкүн: К = 0, К = 1, ... , К = 9, К = 10.

Сумманын эрежесине ылайык, төмөнкүнү алабыз:

$$1+2+3+...+10+11=\frac{1+11}{2}\cdot 11=66.$$

Мүмкүн болгон ар түрдүү заказдардын саны 66га барабар.

Жообу: 66

2-ыкма

	Тooктун этинен жасалган шашлык	Койдун этинен жасалган шашлык	Уйдун этинен жасалган шашлык	Заказ
1.	0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	000010001000
2.	0	0 0 0 0	0 0 0 0 0	010000100000
3.	0 0 0 0	0 0	0 0 0 0	000010010000
4.	0 0 0 0 0		0 0 0 0 0	000001100000
5.		0 0 0 0 0 0 0 0 0 0		100000000001

Жогорудагы таблицада мүмкүн болгон заказдардын 5 мисалы берилген. Таблицадагы вертикалдуу сызыктарды «1», шашлыктарды «0» деп белгилейбиз.

Биринчи заказда Азамат тооктун этинен жасалган 4 шашлык, койдун этинен жасалган 3 шашлык жана уйдун этинен жасалган 3 шашлык тандап алган. Демек, заказды 000010001000 деп белгилеп койсок болот.

Акыркы заказдын алдындагы заказда Азамат тооктун этинен жасалган 5 шашлык жана уйдун этинен жасалган 5 шашлык тандап алды. Бул заказды 000001100000 деп белгилеп койсок болот.

Акыркы заказда Азамат койдун этинен гана жасалган 10 шашлыкты тандап алды. Бул заказды 100000000001 деп белгилеп койсок болот.

Ар бир заказда он «0»ду жана эки «1»ди бир гана жолу ордун өзгөртүп белгилеп жазса болот. Бир заказ башка заказдан бөлүп турган эки сызыктын орду менен гана айырмаланып турат.

Демек, он «0» жана эки «1»дин орун которуусунун санын гана эсептеп чыгуу жетиштүү болот.

Тагыраак айтканда, арасында 10 нөл жана 2 бир бар 12 символдон гана. Мындай орун которуулардын саны $\frac{12!}{2!\cdot 10!} = 66$ га барабар.

1-мүмкүн болгон түшүндүрүү: Орун которуу 12 символдон турат. «1»ге барабар болгон 2 символду тандап алуу керек. Же 12 орундан 2 орунду тандап алып, аларга бөлүү чиймелерин коюп коюу керек. Айкалыштыруулардын саны 12 орундан 2ден болот.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!},\ n = 12,\ k = 2,\ C_{12}^2 = \frac{12!}{2!\cdot 10!} = 66$$

Жообу: 66

2-мүмкүн болгон түшүндүрүү: Бардыгы 12 символ. Алардын ону «0» го, экөө «1»ге барабар. Демек, орун которуулардын саны $C_{12}^{10} = \frac{12!}{10!\cdot 2} = 66$ га барабар.

Жообу: 66

3-мүмкүн болгон түшүндүрүү: Айрымдары $k_1,\ k_2,\ \dots k_m$ болуп кайталанган m элементтердин орун котороруларынын саны $\widetilde{P}_m = \dfrac{m!}{k_1!\cdot k_2!\cdot \ldots \cdot k_m!}$ формуласы менен эсептелет.

Биздин учур боюнча $\widetilde{P}_{12} = \dfrac{12!}{10!\cdot 2!} = 66$

Жообу: 66

4-мүмкүн болгон түшүндүрүү:

m элементтеринин k га чейин кайталанган айкалыштардын саны $\widetilde{C}_m^k = C_{m+k-1}^k$ формуласы менен эсептелет.

Биздин учур боюнча $k = 10,\ m = 3,\ \widetilde{C}_3^{10} = C_{12}^{10} = C_{12}^{2} = 66$.

Жообу: 66

Баалоо критерийлери

№№ п./п.	Чыгарылыш этаптары	Упайлардын саны
1.	Маселенин шартын талдоонун негизинде 12 элементтерден турган комбинацияны табуу керектиги жөнүндө тыянак чыгарылган.	1 упай
2.	Маселенин толук чыгарылышы жазылган.	6 упай
Бардыгы		7 упай

Эскертүүлөр.

1) Биринчи этап үчүн төмөндөгүдөй упайлар берилет:

- Эгерде маселенин шартын талдоо туура жүргүзүлсө, түшүндүрмөлөр берилсе, анда 1 упай берилет.

2) Экинчи этап үчүн төмөндөгүдөй упайлар берилет:

- Эгерде тандалып алынган комбинаториканын эрежесинин же формуласынын толук негиздөөсү берилсе, чыгарылыш ырааттуу түрдө жазылса, туура жообу алынса, анда 6 упай берилет;
- Эгерде туура жооп алынып, бирок негиздөөлөрдө, тандалган эреже же фомулада маанилүү эмес каталар кетсе, анда 5 упай берилет;
- Эгерде чыгарылыш ырааттуу түрдө берилсе, аягына чейин чыгарылса, бирок негиздөөлөр толугу менен так берилбесе, анда 4 упай берилет;
- Эгерде чыгарылыштын туура жолу тандалса, бирок чыгарылыш аягына чейин чыкпай калса же туура эмес жоопко алып келген 1-2 ката кетсе, анда 3 упай берилет;

- Эгерде маселенин шартын талдоонун негизинде айрым туура ырасстоолор берилсе, бирок берилген суроонун жообуна алып келбесе, анда 2 упай берилет;
- Эгерде катышуучу берген айрым ырастоолор туура эмес болсо жана ошонун кесепетинен туура эмес жооп алынса же жооп алынбаса, анда 1 упай берилет;
- Эгерде чыгарылышы туура эмес болсо же чыгарылышы жок болсо, анда 0 упай берилет.

3) Башка ыкма менен чыгарылган ар кандай туура чыгаралыш үчүн упайлардын саны жогоруда берилген схеманын негизинде бөлүштүрүлөт.

4) Чыгарылышы түз тандоодон туруп, узун болушу мүмкүн. Бирок ал туура болуп эсептелет. Чыгарылышы толугу менен ыраттуу түрдө түшүндүрүлүп, туура жооп алынса, толук 7 упай берилет.

2-пунктта көрсөтүлгөндөй жол менен толук эмес берилген түшүндүрмө үчүн, кетирилген каталар үчүн, туура жоопту албаганы үчүн упайлардын саны алынып салынат.